Høgskolen i Østfold

SENSORVEILEDNING

Emnekode:	SFB10719-1 20H
Emnenavn:	Matematikk og statistikk
Eksamensform:	Individuell skriftlig, digital, hjemmeeksamen. Firetimers eksamen.
Dato:	30.11.2020
Faglærer(e):	Erlend Sand Aas og Janne Strømme
Eventuelt:	

Oppgave 1 (20%)

Fra Læringsutbytte: løsning av ligninger og systemer av ligninger samt derivasjon, kjerneregel og funksjonsanalyse.

a) Løs likningen

$$-x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$x_1, x_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-1)(4)}}{2(-1)}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{-2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{-2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-3 \pm 5}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-3+5}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-3-5}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

b) Løs likningssettet

$$\text{I) } 2x + 3 - y = 0$$

$$\text{II) } y - 3x = 1$$

$$\text{II) } y = 1 + 3x$$

$$\text{I) } 2x + 3 - (1 + 3x) = 0$$

$$2x + 3 - 1 - 3x = 0$$

$$-x + 2 = 0$$

$$x = 2$$

$$\text{II) } y - 3x = 1$$

$$y - 3 \cdot 2 = 1$$

$$y - 6 = 1$$

$$y = 7$$

c) Deriver funksjonen

$$\frac{x^2 + 5x}{x - 5}$$

$$= \frac{(2x+5)(x-5)-(x^2+5x)\cdot 1}{(x-5)^2}$$
$$= \frac{2x^2-10x+5x-25-x^2-5x}{(x-5)^2}$$
$$= \frac{x^2-10x-25}{(x-5)^2}$$

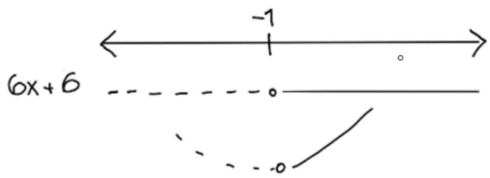
d) Deriver funksjonen

$$f(x) = (e^x + x)^3$$
$$f'(x) = 3(e^x + x)^2(e^x + 1)$$

e) Gitt funksjonen Finn likningen til tangenten i vendepunktet til $f(x)$

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$
$$f''(x) = 6x + 6$$
$$f''(x) = 0$$



$$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 = 2$$

Vendepunkt (-1,2)

Likning for vendetangent:

$$f'(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) \quad = -3$$

$$y - 2 = -3(x-(-1))$$
$$y - 2 = -3x - 3$$
$$y = -3x - 1$$

Oppgave 2 (15%):

a) Grafen ovenfor fra aftenposten.no viser spredningen av covid-19 i Norge. Forklar kort hvilken matematisk funksjon du kan bruke for å lage et estimat for spredning av covid-19.

Smitten kan beskrives med en geometrisk rekke eller en eksponentialfunksjon, da smitten spres eksponentielt.

$a_n = a_0 * k^t$ hvor
$a_t\ er\ smitten\ etter\ t\ dager, a_0\ er\ smitten\ i\ dag, k\ er\ kvotienten\ smitten\ spres\ med,$
$og\ t\ er\ antall\ dager\ med\ smitte$

Anta at det er 5 personer som er smittet ved Campus i Halden.

b) Estimer hvor mange som vil være smittet om 30 dager, dersom smitten øker eksponentielt med 5% daglig.

$a_n = a_0 * k^t = 5 * (1 + 0.05)^{30} \approx 22\ personer$

c) Hvor mange dager tar det før antallet smittede er doblet?

$$2a_0 = a_0 * 1.05^t$$

$$2 = 1.05^t$$

$$\ln(2) = t * ln(1.05)$$

$$t = \frac{\ln(2)}{\ln(1.05)} \approx 14\ dager$$

d) Hva må til for at antall smittede skal gå mot null? Forklar ved hjelp av en matematisk funksjon.

For at antallet smittete skal gå mot null må kvotientent k være mindre enn 1. Ved å holde avstand, vaske hender og bruke maske vil man kunne få mindre nye smittede enn antall som blir friske, k vil være mindre enn 1, og den totale smitten vil gå mot null.

Oppgave 3 (10%)

Fra læringsutbytte: anvendelse av derivasjon maksimums- og minimumsproblemer, funksjonsdrøfting.

En bedrift selger blomster. Kostnadsfunksjonen til bedriften er $k(x) = 0,02x^2 + 35x + 30\ 000$.
Inntektsfunksjonen til bedriften er $i(x) = 85x$.

a) Vis at profittfunksjonen kan uttrykkes $\pi(x) = -0,02x^2 + 50x - 30\ 000$

$\pi(x) = i(x) - k(x)$

$85x - (0,02x^2 + 35x + 30\ 000)$

$85x - (0,02x^2 + 35x + 30\ 000)$

$85x - 0,02x^2 - 35x - 30\ 000$

$-0,02x^2 + 50x - 30\ 000$

$\pi(x) = -0,02x^2 + 50x - 30\ 000$

b) Hvor mange blomster må bedriften selge for at profitten er positiv?

$\pi(x) > 0$

$-0,02x^2 + 50x - 30\ 000 = 0$

For å få full uttelling skal utregning vises med:

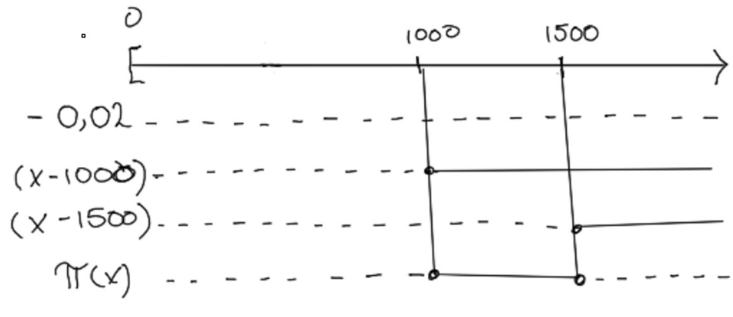
$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$x_1 = 1000$

$x_2 = 1500$

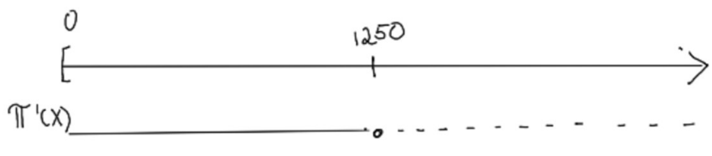
$-0,02x^2 + 50x - 30\ 000 = -0,02(x - 1500)(x - 1000)$



$\pi(x) > 0$ for $1000 < x < 1500$

c) Avgjør når profitten til bedriften er stigende og synkende. Hvor mange blomster bør bedriften selge, og hva er maksimal profitt?

$\pi'(x) = -0,04x + 50$



$\pi(x)$ stiger for $0 \leq x < 1250$

$\pi(x)$ synker for $x > 1250$

Maks profitt: $\pi(1250) = -0,02(1250)^2 + 50(1250) - 30\ 000 = 1250$

Oppgave 4 (15%)

(Funksjoner av flere variable)

Funksjonen f er gitt ved:

$f(x, y) = y + x^2 - 2y^2$

a) Finn de partiell deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen f.
$f(x, y) = y + x^2 - 2y^2$
$f_x(x, y) = 2x$
$f_y(x, y) = -4y + 1$
$A: f_{xx}(x, y) = 2$
$C: f_{yy}(x, y) = -4$
B: $f_{xy}(x, y) = 0$

b) Vis at funksjonen har nøyaktig et stasjonærpunkt ved regning.
Stasjonært punt der $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$
$2x = 0 \ \rightarrow x = 0$
$-4y + 1 = 0 \ \rightarrow y = 1/4$
$f\left(1, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + 0^2 - 2 * \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1/8$

Stasjonært punkt i (0,1/4,1/8)

c) Klassifiser punktet ved regning.
2. deriverttesten:
$AC - B^2 = 2 * -4 - 0^2 = -8 < 0 \ \rightarrow Sadelpunkt$

Oppgave 5 (20%)

Du har lest at Bitcoin kalles «digitalt» gull, og har lyst til å analysere den årlige historiske avkasting til Bitcoin (B) i forhold til Gull (G) for å se om det historisk har vært noen statistiske likheter. Du henter ut følgende data med årlige avkastningstall i prosent:

	Bitcoin (B)	Gold (G)
2016	124	8
2017	1338	13
2018	-73	-1
2019	94	236
2020	93	25

a) Beregn gjennomsnittet $\overline{\text{B}}$ og G, variansen, $S_B^2\ og\ S_G^2$ og standardavviket $S_B\ \ og\ S_G$ for Bitcoin og gull sin årlige historiske avkastning.

$$\overline{\mathrm{B}} = \frac{1}{5}\,(124 + 1338 - 73 + 94 + 93) = 315$$
$$\overline{\mathrm{Y}} = \frac{1}{5}\,(8 + 13 - 1 + 236 + 25) = 56$$
$$S_X^2 = \frac{1}{5-1}((124-315)^2 + (1338-315)^2 + (-73-315)^2 + (94-315)^2 + (93-315)^2) = 332920$$
$$S_Y^2 = \frac{1}{5-1}((8-56)^2 + (13-56)^2 + (-1-56)^2 + (236-56)^2 + (25-56)^2) = 10191$$

$$S_X = \sqrt{33} = 577$$
$$S_Y = \sqrt{1.02} = 101$$

b) Vis at korrelasjonskoeffisienten $\mathrm{R_{BG}}$ mellom Bitcoin og Gull sin årlige historiske avkastning er-0.2.

$$S_{XY} = \frac{1}{5-1}\big((124-315)(8-56) + (1338-315)*(13-56) + (-73-315)*(-1-56) + (94-315)*(236-56) + (93-315)*(25-56)\big) = -11401$$

$$\mathrm{R_{xy}} = \frac{-11401}{577 * 101} = -0.2$$

c) Gi en kort verbal beskrivelse av hva den negative korrelasjonen mellom Gull og Bitcoin betyr.

Historisk har Bitcoin hatt svært mye høyere avkastning og standardavvik (risiko) enn Gull, og de har vært ukorrelerte: endring i gull har hatt svært liten betydning for endringen i Bitcoin og motsatt. Det vil si at statistisk de siste 5 årene har Bitcoin ikke oppført seg som Gull, men som noe helt eget.

Oppgave 6 (20%)

Fra læringsutbytte sentrale sannsynlighetsfordelinger, estimator og estimering

I et vareparti er 11% av varene defekte. En vare kan enten være defekt eller ikke defekt. Vi undersøker 20 av varene. La X være antall defekte varer i varepartiet.

a) Finn sannsynligheten for at 4 av varene er defekte.

$$P(X=4) = \binom{20}{4} 0{,}11^4 (1-0{,}11)^{20-4} \approx 0{,}109 = 10{,}9\%$$

b) Finn sannsynligheten for at $X \le 1$

$$P(X=0) + P(X=1)$$

$$P(X=0) = \binom{20}{0} 0{,}11^0 (1-0{,}11)^{20} \approx 0{,}097 = 9{,}7\%$$

$$P(X=1) = \binom{20}{1} 0{,}11^1 (1-0{,}11)^{19} \approx 0{,}24 = 24\%$$

$$P(X=0) + P(X=1) = 24\% + 9{,}7\% = 33{,}7\%$$

c) I et annet vareparti har vi funnet 25 defekte varer av 200. La X være antall defekte varer. Finn et 95% konfidensintervall for p.

$$\left[0{,}125-1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}125(1-0{,}125)}{200}},0{,}125+1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}125(1-0{,}125)}{200}}\right]=[0.08,0.17]$$

En stokastisk variabel X er normalfordelt med gjennomsnitt μ =15 og varians σ^2 = 9.

d) $P(X>18)$

$$Z=\frac{18-15}{3}=1$$

$$P(X>18)=1-0{,}8413=15{,}86\%$$

e) Finn $P(16<x<18)$

$$P(16<x)\ ,\ z=\frac{16-15}{3}=\frac{1}{3}$$

$$P(18<x)\ ,\ z=\frac{18-15}{3}=1$$

$$P\left(\frac{1}{3}<z<1\right)=0{,}84-0{,}63\approx 0{,}21$$