Høgskolen i Østfold

EKSAMEN

Emnekode:	**Emnenavn:**
SFB10719	Matematikk og statistikk
Dato:	**Eksamenstid:**
10.12.19	4 timer
Hjelpemidler:	**Faglærere:**
Godkjent kalkulator Vedlagte formelsamlinger; en for matematikk og en for statistikk	Henrik Sætra Erlend Sand Aas

Om eksamensoppgaven og poengberegning:

Oppgavesettet består av 5 oppgaver som alle vektlegges likt. Alle oppgavene skal besvares.

Dersom noe er uklart eller mangler, inngår det som en del av oppgaven å ta de nødvendige forutsetninger.

Sensurfrist: 2.1.20

Karakterene er tilgjengelige for studenter i Studentweb.

Oppgave 1 (20%)

Gitt funksjonen

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

a) Finn funksjonens maksimumspunkt og minimumspunkt
b) Finn funksjonens vendepunkt og når funksjonen er konkav og konveks
c) Finn tangentlikningen i vendepunktet

Oppgave 2 (20%)

Du ønsker å starte opp en bedrift. Du låner **50 000** som nedbetales som et annuitetslån med årlige terminer over en periode på **4** år og med en årlig rente på **4%**:

a) Regn ut det årlige terminbeløpet

Du må betale lønn til partneren din. Hun skal ha **400 000** i året, og du må anta at det er en lønnsvekst på **3%** i året.

b) Vis at hennes lønn i år t kan skrives ved funksjonen $l(t) = 400\,000 * 1.03^t$
c) Regn ut med integrasjon hvor mye hun får utbetalt i lønn de **10** første årene.

Partneren er innom jobben $(x + 2)$ ganger i løpet av det første året. Lønn per besøk er da gitt med funksjonen:

$$f(x) = \frac{400\,000}{(x + 2)}$$

d) Finn asymptotene til $f(x)$ og forklar betydningen.

Oppgave 3 (20%)

Bedriften skal selge viskelær. Kostnad og inntekt er gitt ved følgende funksjoner når $\mathbf{x}$ er antall viskelær solgt:

$$\mathrm{K(x)} = 0.05\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + 100, \qquad \mathrm{x} \geq 0$$

$$\mathrm{I(x)} = 10\mathrm{x}, \qquad \mathrm{x} \geq 0$$

a) Vis at profittfunksjonen kan skrives
$\pi(\mathrm{x}) = -0.05\mathrm{x}^2 + 8\mathrm{x} - 100, \quad \mathrm{x} \geq 0$

b) Finn maksimal profitt, og hvor mange viskelær du da selger.

Du ønsker også å selge blyanter; la $\mathbf{x}$ være antall viskelær og y være antall blyanter du selger.

Profittfunksjonen for bedriften din er nå gitt ved følgende funksjon:

$$f(x, y) = -0.05(x^2 + y^2) + 8(x + 2y) - 100, \qquad x \geq 0, y \geq 0$$

c) Finn de partiell deriverte av 1. og 2. orden til $f(x, y)$.

d) Vis ved regning hvor mange viskelær og blyanter du må selge for å maksimere profitten, og finn maksimal profitt.
e) Vis ved 2. derivert testen at dette er et maksimalpunkt.

Anta at du har følgende bi-betingelse:

$$x + y = 200$$

f) Regn ut optimal antall blyanter og viskelær du må selge gitt bi-betingelsen med Lagranges metode

Oppgave 4 (20%):

Du arbeider nå som statistikkansvarlig i klesforretningen Fin og freidig. Sjefen din vil ha en oversikt over salget av skinnbukser, og ber deg finne tallene for de siste 5 årene. I følgende tabell finner du en oversikt over salget av skinnbukser i antall 1000 kroner:

År	2014	2015	2016	2017	2018
Skinnbukser	120	140	110	100	90

a) Hva er medianen, gjennomsnittet, utvalgsvariansen og utvalgsstandardavviket for disse inntektene?
b) Beregn et 95% konfidensintervall for gjennomsnittet i a)

Det viser seg at grunnen til at sjefen tror at salget av olabukser kanskje går på bekostning av salget av skinnbukser. Hun vil vite mer om hvordan salget av disse to varene henger sammen. I denne tabellen finner du en oversikt over salget av olabukser, oppgitt i antall tusen kroner:

År	2014	2015	2016	2017	2018
Olabukser	250	280	300	305	370

Den tidligere statistikkansvarlige hadde allerede regnet ut gjennomsnittsverdien (Y strek = 301) og (utvalgsvariansen = S2Y = 1955).

c) Beregn korrelasjonskoeffisienten RXY for inntektene fra salg av skinnbukser (X) og olabukser (Y). Utvalgskoeffisienten (Cov[XY], eller Sxy, er -640).

Du gjennomfører i løpet av en uke et eksperiment for å teste hvor mange som kjøper olabukse (1 eller flere), og hvor mange som ikke kjøper olabukse. I løpet av denne uken hadde dere 300 kunder, og 55 av disse kjøpte olabukse.

d) Lag et estimat ($\hat{p}$) for sannsynligheten for at en kunde kjøper olabukse(r).
e) Lag et 99% konfidensintervall for $\hat{p}$.

Sjefen ønsker også en oversikt over hvor mange olabukser en vanlig kunde kjøper. Statistikken viser at det er 75% sannsynlighet for at en kunde kjøper 0 olabukser, 20% sannsynlighet for at kunden kjøper 1 olabukse, 4% sannsynlighet for at en kunde kjøper 2 olabukser, og 1% sannsynlighet for at en kunde kjøper 3 bukser. Ingen kjøper flere enn dette.

Antall bukser	0	1	2	3
Sannsynlighet	75%	20%	4%	1%

f) La X være antall bukser en tilfeldig valgt kunde kjøper. Hva er forventet verdi, varians og standardavviket til X?

Oppgave 5 (20%):

Det er dessverre noen som velger å stjele fra butikken deres. Av alle kundene deres er det 2% av dem tar med seg noe de ikke har betalt for.

a) Hva er forventet antall tyverier (X) i løpet av en uke hvor 300 kunder er innom? Hva er variansen og standardavviket til X?
b) Hva er sannsynligheten for at det blir begått mindre enn 4 tyverier denne måneden?

Over tid ser dere at hver kunde handler for 500 kroner (μ), og standardavviket er 150 (σ).

c) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt kunde handler for mer enn 740 kroner?
d) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt kunde handler for mellom 110 og 500 kroner?
e) Hva er sannsynligheten for at 5 tilfeldig valgte personer handler for mer enn 3000 kroner?

70% av kundene deres er menn. Av de som kjøper undertøy, er 60% menn. Til sammen kjøper 20% av kundene deres undertøy.

f) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig mannlig kunde kjøper undertøy?

I utstillingsvinduet er det 6 utstillingsdukker. Det er vinter, og dere skal stille ut vinterkolleksjonen deres. Dere har 10 forskjellige luer, og hver dukke skal ha en lue (de skal ha forskjellige luer).

g) Hvor mange forskjellige kombinasjoner av luer på utstilling finnes?
h) Du skal nå velge hvilken rekkefølge de 6 dukkene skal stå i. Hvor mange mulige kombinasjoner finnes?

Formelsamling SFB10719-1 19H

Kapittel 1:

Definisjoner:

$a^n \overset{def}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ ganger}}$ $a^{-n} \overset{def}{=} \frac{1}{a^n}$ $a^0 \overset{def}{=} 1$

Kvadratsetningene:

$(a^2 + b^2) = a^2 + 2ab + c^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Potensregning:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Kapittel 2:

ABC formel:

$ax^2 + bx + c = 0$ gir løsning (nullpunkter/røtter):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Faktorisering:

Har $ax^2 + bx + c = 0$ røttene r_1 *og* r_2 så er

$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$

Kapittel 3:

Logaritmefunksjoner:

a^x omvendt funksjon $log_a x$

e^x omvendt funksjon $\ln x$

Regneregler:

$log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$

$log_a \frac{x}{y} = log_a(x) - log_a(y)$

$log_a(x^k) = k * log_a(x)$

$ln(xy) = ln(x) + ln(y)$

$ln \frac{x}{y} = ln(x) - ln(y)$

$\ln(x^k) = k * ln(x)$

Formelsamling SFB10719-1 19H

Kapittel 4:

Bankformel:

Setter du et beløp A inn i banken med rente r per år, så er beløpet vokst til $A(1+r)^n$ etter n år.

Tilsvarende: setter du inn et beløp A inn i banken med perioderente r per periode, så er beløpet vokst til $A(1+r)^n$ etter n perioder.

Aritmetisk rekke:

Summen av n ledd i en aritmetisk rekke er gitt ved:

$S(n) = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$, eller ved

$$S(n) = n\left(a_1 + \frac{(n-1)d}{2}\right)$$

Ledd nr. n: $a_n = a_1 + (n-1)d$

Geometrisk rekke:

Summen av n ledd i en geometrisk rekke er gitt ved:

$$S(n) = a_1 * \frac{1-k^n}{1-k}$$

Ledd nr. n: $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$

Kapittel 5:

Nåverdi:

Nåverdien til et beløp A utbetalt om t tidsperioder er $\frac{A}{(1+r)^t}$ hvor r er perioderenta.

Kontinuerlig rente:

$A_t = A_0 e^{rt}$

Nåverdi av en annuitet, første betaling om en periode:

$$s = A\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

Terminbeløpet ved et annuitetslån:

$$A = \frac{K \cdot r}{1-(1+r)^{-n}}$$

Kapittel 6:

Definisjon av den deriverte:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Derivasjonsregler:

$g(x) = k^* \cdot f(x)$ $\quad$ $g'(x) = k^* \cdot f'(x)$

$h(x) = g(x) \pm f(x)$ $\quad$ $h'(x) = g'(x) \pm f'(x)$

$uv' = u'v + uv'$

Formelsamling SFB10719-1 19H

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Kjerneregel:

$La\ h(x) = f(g(x))\ gir\ h'(x) = f'(u)g'(x), hvor\ u = g(x)$

$f(x) = u^n$ $\quad f'(x) = nu^{n-1} \cdot u'$

$f(x) = e^u$ $\quad f'(x) = e^u * u'$

$f(x) = \text{In}(u)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{u}u'$

Deriverte til utvalgte funksjoner:

$f(x) = k$ $\quad f'(x) = 0$

$f(x) = ax + b$ $\quad f'(x) = a$

$f(x) = x^n$ $\quad f'(x) = nx^{n-1}$

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f(x) = \sqrt{x} = x^{0.5}$ $\quad f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = e^x$ $\quad f'(x) = e^x$

$f(x) = \ln(x)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x}$

L'Hopitals regel:

Anta at grensen $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0\ eller\ \infty, og\ at\ \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\ eksisterer.\ (Grensen\ kan\ godt\ være\ \infty\ eller\ -\infty.)$

Da er $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Tangentformel:

$y - y_1 = a(x - x_1)$, eller

$y - f(a) = f'(a)(x - a)$

Elastisitet:

$$El_x f(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Økonomibegreper og formler:

Profittfunksjon: $\pi(x) = I(x) - K(x),\ ofte\ er\ I(x) = px)$

Grenseprofitt: $\pi'(x)$

Grenseinntekt: $I'(x)$

Grensekostnad: $K'(x)$

Enhetskostnad: $A(x) = \frac{K(x)}{x}$

Kostnadsoptimum: $A(x) = K'(x)$

Formelsamling SFB10719-1 19H

Kapittel 7:

Krumning:

$f''(x) \geq 0, \text{konveks}$

$f''(x) \leq 0, \text{konkav}$

Vendepunkt:

$f''(x)$ bytter fortegn

2.derivert testen:

La f(x) være en dobbeltderiverbar funksjon, og la a være et tall sånn at $f' = 0$. Da er:

I: a et lokalt maksimumspunkt/ topp-punkt hvis $f''(x) < 0$

II: a et lokalt minimumspunkt/ bunn-punkt hvis $f''(x) > 0$

Taylorpolynom:

$$f(x) = p_n(x) + R_{n+1}(x), \text{hvor } p_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + + \frac{f^n(0)}{1n!}x^n$$

For en geometrisk rekke: $a_{n+1} = ka_n$

Kapittel 8:

Stasjonære punkt:

Et punkt x_0, y_0 kalles et stasjonært punkt dersom

$f'_x(x_0, y_0) = 0$ og $f'_y(x_0, y_0) = 0$

Klassifisering av stasjonære punkter:

A = $f''_{xx}(x, y)$

B = $f''_{xy}(x, y)$

C = $f''_{yy}(x, y)$

Vi betrakter $AC - B^2$ for et stasjonært punkt.

Det stasjonære punkter er et:

I: a Lokalt maksimumspunkt hvis $AC - B^2 > 0 \; og \; A < 0$

II: Lokalt minimumspunkt hvis $AC - B^2 > 0 \; og \; A > 0$

III: Sadelpunkt hvis $AC - B^2 < 0$

Lagranges metode:

$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$

Likningssystem for kandidater til maks/min $f(x, y)$ $gitt$ $g(x, y) = c$

$A)\ f'_x(x, y) - \lambda g'_x(x, y) = 0$

$B)\ f'_y(x, y) - \lambda g'_y(x, y) = 0$

$C)\ g(x, y) = c$

Formelsamling SFB10719-1 19H

Kapittel 9:

$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + K$ $(dersom\, n\ \neq\ -1)$

$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + K$ $(dersom\, n \neq -1)$

$\int e^x dx = e^x + K$

$\int a^x dx = a^x/\ln(a) + K$

$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + K$

Delvis integrasjon: $\int u' * v\ dx = (u * v) - \int u * v'\ dx$

Eksempel (substitusjon):

$$\int e^{2x}dx, u = 2x\ gir \int e^u \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}e^u + K = \frac{1}{2}e^{2x} + K. (\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du)$$

Eksempel (delbrøk):

$\int \frac{2}{x^2-1}dx, skriv\ \frac{2}{x^2-1}\ som\ \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ og finn A og B.

Bestemt integral:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \qquad hvor\ F'(x) = f(x)$$

Formelsamling statistikk høsten 2019

Henrik Skaug Sætra

20.11.2019

1 Deskriptiv statistikk

1.1 Kvartiler og median

Første kvartil: $\frac{n+1}{4}$

Andre kvartil (median): $\frac{n+1}{2}$

Tredje kvartil: $\frac{3(n+1)}{4}$

Vi finner kvartilene med formlene ovenfor, men vi kan få en rest som er enten 0, 0.25, 0.5 eller 0.75 - hva gjør vi da?

1. Hvis resten er null, bruker vi observasjon k
2. Hvis resten er 0.25, starter vi i observasjon nr, $(k - 0.25)$ og flytter oss 25% av avstanden til neste observasjon
3. Hvis resten er 0.5, starter vi i observasjon nr, $(k - 0.5)$ og flytter oss 50% av avstanden til neste observasjon
4. Hvis resten er 0.75, starter vi i observasjon nr, $(k - 0.75)$ og flytter oss 75% av avstanden til neste observasjon

1.2 Modalprosent

Modalprosent: $\frac{modus}{n}$

1.3 Gjennomsnitt

Gjennomsnitt:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{1}$$

1.4 Utvalgsvarians og utvalgsstandardavvik

Utvalgsvarians:

$$\begin{aligned} S_X^2 &= \frac{1}{n-1}((X_1 - \bar{X})^2 + \ldots + (X_n - \bar{X})^2) \\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Utvalgsstandardavvik:

$$S_X = \sqrt{S_X^2} \tag{3}$$

1.5 Utvalgskovarians

Utvalgskovarians:

$$\begin{aligned} S_{XY} &= \frac{1}{n-1}(X_1 - \bar{X})(Y_1 - \bar{Y}) + \ldots + (X_n - \bar{X})(Y_n - \bar{Y}) \\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \end{aligned} \tag{4}$$

Korrelasjonskoeffisienten:

$$R_{XY} = \frac{S_{XY}}{S_X \cdot S_Y} \tag{5}$$

2 Sannsynlighetsregning

Utfallsrom: $\Omega =$ Mengden av alle mulige utfall

Begivenhet: En delmengde av Ω

Sannsynligheten for en begivenhet: $P(A) = \sum_{u \in A} p(u)$

Uniform sannsynlighetsmodell: $P(A) = \frac{a}{n} = \frac{\text{gunstige}}{\text{mulige}}$

Komplement: $A^C =$ A skjer ikke

Delmengde: $B \subset A =$ B er en delmengde av A

Ikke delmengde: $B \not\subset A =$ B medfører ikke alltid A

Tom delmengde: $A \cap B = \emptyset =$ A og B inntreffer aldri samtidig

Sannsynlighetsmodell:

1. $0 \leq p_i \leq 1, i = 1m \ldots n$
2. $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

Addisjonsformler:

$$P(A) + P(A^C) = 1, \qquad P(A^C) = 1 - P(A) \tag{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{7}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = &P(A) + P(B) + P(C) \\ &- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &+ P(A \cap B \cap C) \end{aligned} \tag{8}$$

3 Kombinatorikk

Ordnet med tilbakelegging:

$$N^s = N \cdot N \cdot N \cdot \ldots \cdot N \tag{9}$$

Ordnet uten tilbakelegging:

$$\begin{aligned}(N)_s &= N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-s+1) \\ &= \frac{N!}{(N-s)!}\end{aligned} \tag{10}$$

Uordnet uten tilbakelegging:

$$\begin{aligned}\binom{N}{s} &= \frac{N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-s+1)}{s!} \\ &= \frac{N!}{s!(N-s)!}\end{aligned} \tag{11}$$

Uordnet med tilbakelegging:

$$\binom{N+s-1}{s} \tag{12}$$

4 Betinget sannsynlighet

Definisjon av betinget sannsynlighet:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{13}$$

Bayes' regel:

$$P(B|A) = P(A|B) \cdot \frac{P(B)}{P(A)} \tag{14}$$

Oppsplittingsprinsippet (loven om total sannsynlighet): (når $\Omega = \cup \ldots \cup B_n$ og $B_1, \ldots, B_n$ alle er disjunkte)

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n) \tag{15}$$

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^C) \cdot P(B^C) \tag{16}$$

To begivenheter er uavhengige når:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{17}$$

5 Tilfeldige variabler, forventning og varians

Tilfeldig variabel: Enhver funksjon som til ethvert mulig utfall definerer et bestemt reelt tall.

Fordelingsfunksjonen til X:

$$P(x) = P(X = x) \tag{18}$$

Den kumulative fordelingsfunksjonen til X:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_r \leq x} P(X \leq x_r) \tag{19}$$

Forventningen til X:

$$E[X] = \sum_x x \cdot P(X = x) \tag{20}$$

Forventningen til h(X):

$$E[h(X)] = \sum_x h(x) \cdot P(X = x) \tag{21}$$

Variansen til en diskret variabel X:

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2 \tag{22}$$

Standardavviket til en tilfeldig variabel X:

$$\sigma[X] = \sqrt{Var[X]} \tag{23}$$

Regneregler for forventning og varians (a og b konstanter):

$$\begin{aligned} E[X+Y] = E[X] + E[Y], \qquad E[a] = a, \qquad E[b \cdot X] &= b \cdot E[X] \\ Var[a + bX] &= b^2 Var[X] \end{aligned} \tag{24}$$

6 Simultane sannsynlighetsfordelinger

Simultanfordelingen for to tilfeldige variabler X og Y:

$$p(x,y) = P(X = x, Y = y) \tag{25}$$

Marginalsannsynligheten til X:

$$P(X = x) = \sum_y p(x,y) \tag{26}$$

Marginalsannsynligheten til Y:

$$P(Y = y) = \sum_x p(x,y) \tag{27}$$

Forventningen til $h(X,Y)$):

$$E[h(X,Y)] = \sum_{x,y} h(x,y) p(x,y) \tag{28}$$

Kovariansen til X og Y:

$$\begin{aligned} Cov[X,Y] =& E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ =& E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y] \end{aligned} \tag{29}$$

Hvis X og Y er uavhengige, da er:

$$\begin{aligned} & p(x,y) = P(X = x) \cdot P(Y = y) \\ & Cov[X,Y] = 0 \\ & Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] \end{aligned} \tag{30}$$

Generelt gjelder:

$$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2Cov[X,Y] \tag{31}$$

Korrelasjonskoeffisienten:

$$\rho[X,Y] = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]} \cdot \sqrt{Var[Y]}} \in [-1,1] \tag{32}$$

Hvis $X_1, X_2, \ldots X_n$ alle er uavhengige, da er:

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] \tag{33}$$

7 Sentrale sannsynlighetsfordelinger

X = Binomisk(n,p) :

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad E[X] = np, \qquad Var[X] = np(1-p) \tag{34}$$

X = Hypergeometrisk(N,M,n):

$$P(X=x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad E[X] = n\frac{M}{N}, \\ Var[X] = \frac{N-n}{N-1} \cdot n\frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \tag{35}$$

X = Poisson λ :

$$P(X=x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \qquad E[X] = \lambda, \qquad Var[X] = \lambda \tag{36}$$

X = N[0,1] = Standard normalfordeling. Kontinuerlig fordeling:

$$P(X \in [a,b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx, \qquad E[X] = 0, \qquad Var[X] = 1 \tag{37}$$

Kumulativ fordelingsfunksjon for normalfordelingen (verdiene finnes i tabell):

$$G(z) = P(X \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \tag{38}$$

Her gjelder:

$$G(-z) = 1 - G(z), \qquad P(a \leq X \leq b) = G(b) - G(a) \tag{39}$$

Kumulativ fordelingsfunksjon generelt:

$$G(z) = P(X \leq z) = \int_{-\infty}^{z} h(x) dx \tag{40}$$

Sentralgrensesetningen:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - E[S_n]}{\sigma[S_n]} \leq z\right) = G(z) \tag{41}$$

Kriterier for når vi kan bruke normaltilnærming:

Binomisk	$np(1-p) \geq 5$	OK
Binomisk	$np(1-p) \geq 10$	God
Hypergeometrisk	$N \geq 20n$ og $n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right) \geq 5$	OK
Hypergeometrisk	$N \geq 20n$ og $n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right) \geq 10$	God
Poisson	$\lambda \geq 5$	OK
Poisson	$\lambda \geq 10$	God

Hvis X er binomisk og vi bruker normalfordelingen:

$$P(X \leq x) \approx G\left(\frac{x - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p(1-p)}}\right) \tag{42}$$

Mange utregninger er basert på følgende prinsipp::

$$P(S \leq s) = P\left(\frac{S - E[S]}{\sigma[S]} \leq \frac{s - E[S]}{\sigma[S]}\right) \approx G\left(\frac{s - E[S]}{\sigma[S]}\right) \tag{43}$$

Sentralgrensesetningen for gjennomsnitt:

$$S \approx N[n\mu, n\sigma^2], \quad \bar{X} = N\left[\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right] \tag{44}$$

$$E[S] = \mu n, \quad Var[S] = n\sigma^2, \quad E[\bar{X}], \quad Var[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n} \tag{45}$$

Heltallskorreksjon: I situasjoner der S og s skal være hele tall, er:

$$P(S \leq s) = P(S \leq s + 0,5) \approx G\left(\frac{s + 0,5 - E[S]}{\sigma[S]}\right) \tag{46}$$

8 Estimering og estimatorer

Forventningsrett estimator for et tall θ: En tilfeldig variabel $\hat{\theta}$ med $E[\hat{\theta}] = \theta$

Forventningsskjev estimator for et tall θ: En tilfeldig variabel $\hat{\theta}$ med $E[\hat{\theta}] \neq \theta$

Rapportering av resultater: En rapporterer gjerne resultater på formen:

$$observasjon \pm standardfeil = \hat{\theta} \pm \sigma[\hat{\theta}] \tag{47}$$

Målemodell:

$$\bar{X} \pm \frac{S_X}{\sqrt{n}} \tag{48}$$

Standardfeil for $\bar{X}$:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{S_X}{\sqrt{n}} \tag{49}$$

Binomisk modell med $\hat{p} = \frac{X}{n}$:

$$\hat{p} \pm \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \tag{50}$$

$(1-\alpha)100\%$ konfidensintervall: Et intervall $[\theta_1, \theta_2]$ slik at det er $(1-\alpha)100\%$ sannsynlighet for at konstanten $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

Normalfordeling, forventningsrett estimator og kjent standardavvik:

$$P(|\hat{\theta} - \theta| \leq d) = P\left(\left|\frac{\hat{\theta} - \theta}{\sigma(\hat{\theta})}\right|\right) \approx G(z) - G(-z) \tag{51}$$

$$= G(z) - (1 - G(z)) \tag{52}$$

$$= 2G(z) - 1 \tag{53}$$

Tolkning av rapport:

- 68,3% sannsynlighet for at intervallet mellom $\hat{\theta} \pm \sigma[\hat{\theta}]$ inneholder θ
- 95,4% sannsynlighet for at intervallet mellom $\hat{\theta} \pm 2\sigma[\hat{\theta}]$ inneholder θ
- 99,7% sannsynlighet for at intervallet mellom $\hat{\theta} \pm 3\sigma[\hat{\theta}]$ inneholder θ
- $\hat{\theta} \pm 1,645\sigma[\hat{\theta}]$ er et 90% konfidensintervall
- $\hat{\theta} \pm 1,96\sigma[\hat{\theta}]$ er et 95% konfidensintervall
- $\hat{\theta} \pm 2,58\sigma[\hat{\theta}]$ er et 99% konfidensintervall
- Generelt: $\hat{\theta} \pm z\sigma[\hat{\theta}]$ er et $2G(z) - 1$ konfidensintervall

I en binomisk modell der $np(1-p) \geq 10$, bruker vi tilnærming til normalfordelingen, og et 95 % konfidensintervall er gitt ved:

$$\hat{p} \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \tag{54}$$

I en målemodell der vi har mange observasjoner, bruker vi normalfordelingen, og et 95 % konfidensintervall er gitt ved:

$$\bar{X} \pm 1,96 \cdot \frac{S_X}{\sqrt{n}} \tag{55}$$

Ved få observasjoner, og tilfeldig normalfordelt variabel, kan vi bruke t-fordelingen for å bestemme konfidensintervaller. Finn først $t_{\alpha/2}^{n-1}$ slik at:

$$P\left(T_{n-1} \geq t_{\alpha/2}^{n-1}\right) = \frac{\alpha}{2} \tag{56}$$

Et $(1-\alpha)100\%$ konfidensintervall er da gitt ved grensene

$$\bar{X} \pm t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{S_X}{\sqrt{n}} \tag{57}$$

1 I lotterimodellen er $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y^i$ en forventningsrett estimator for gjennomsnittet av hele populasjonen $\bar{v}$, og

$$Var[\bar{Y}] = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2}{n} \tag{58}$$

9 Normalfordelingen

z	Normalkurven (arealtabell)									
	0	*0,01*	*0,02*	*0,03*	*0,04*	*0,05*	*0,06*	*0,07*	*0,08*	*0,09*
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Figur 1: Normalfordelingen areal

10 Normalkurven (fraktiltabell)

Normalkurven (Fraktiltabell)	
α	z
0,100	1,2816
0,090	1,3408
0,080	1,4051
0,070	1,4758
0,060	1,5548
0,050	1,6449
0,040	1,7507
0,030	1,8808
0,025	1,9600
0,020	2,0537
0,010	2,3263
0,005	2,5758

Figur 2: Normalfordelingen fraktiler

11 t-kurver

Frihets-grader	Sikkerhetsnivå							
	0,25	*0,1*	*0,05*	*0,025*	*0,01*	*0,005*	*0,001*	*0,0005*
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,309	636,619
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327	31,599
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,215	12,924
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,679	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496
100	0,677	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390
200	0,676	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,340
500	0,675	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107	3,310
1000	0,675	1,282	1,646	1,962	2,330	2,581	3,098	3,300

Figur 3: t-kurver (fraktiltabell)

12 Kjikvadratkurver

Frihets-grader (v)	Sikkerhetsnivå og signifikans					
	70 %	*80 %*	*90 %*	*95 %*	*98 %*	*99 %*
	0,3	*0,2*	*0,1*	*0,05*	*0,02*	*0,01*
1	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
25	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
30	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892
40	44,165	47,269	51,805	55,758	60,436	63,691
50	54,723	58,164	63,167	67,505	72,613	76,154

Figur 4: Kjikvadratkurver (fraktiltabell)

13 Ekstra

13.1 To-punktsformel for rett linje

Ettpunktsformel:

$$y - y_1 = \alpha(x - x_1) \tag{59}$$

Topunktsformelen (kombineres med ettpunktsformelen):

$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{60}$$