Høgskolen i Østfold

SENSORVEILEDNING

Emnekode:	SFB10719-1-19H
Emnenavn:	**Matematikk og Statistikk** **Sensorveiledning for oppgave 1-3**
Eksamensform:	**Skriftlig**
Dato:	10.12.2019
Faglærer(e):	Henrik Sætra, Erlend Sand Aas
Eventuelt:	

Oppgave 1 (20%)

Fra læringsutbytte: derivasjon og funksjonsanalyse

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

Deriverer funksjonen:

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

Setter $f'(x) = 0$ for å finne maks/min punkter:

$f'(x) = 0$

$3x^2 - 6x - 9 = 0$

Bruker abc formel:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 * 3 * (-9))}}{(2 * 3)}$$

Nullpunktene er:

x=-1, x=3

Setter inn i f(x):

$f(-1) = (-1)^3 - 3 * (-1)^2 - 9 * (-1) + 10 = 15$

$f(3) = (3)^3 - 3 * (3)^2 - 9 * (3) + 10 = -17$

Det er bare i punktene (-1,15) og (3,-17) at utrykket for den deriverte kan skifte fortegn.

Sjekker tilfeldige tall i intervallene:

$-\infty \leq x < -1$:

$f'(-2) = 15 > 0$

$-1 < x < 3$:

$f'(0) = -9 < 0$

$3 < x < \infty$:

$f'(4) = 15 > 0$

Grafen stiger til punktet x= -1, faller fra x=-1 til x=3, stiger fra x=3

Følgelig er

<u>Topp-punktet (-1, 15)</u>

<u>Bunn-punktet (3, -17)</u>

b) Finner den 2. deriverte til f(x)

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$f''(x) = 6x - 6$

Vendepunkt når $f''(x) = 0$

$6x - 6 = 0$

$6x = 6$

$x = 1$

$f(1) = (1)^3 - 3 * (1)^2 - 9(1) + 10 = -1$

<u>Vendepunkt i (1, -1)</u>

Finn når funksjonen er konveks og konkav:

$f''(x) = 6x - 6$

_________________1______________x

$f''(x)$----------------- 0 ______________

<u>Konveks: x>1</u>

<u>Konkav: x<1</u>

c)

Finn tangentlikning i vendepunkt

Vendepunktet (1,-1)

Tangentlikning: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

a = 1, f(1)=-1, $f'(1) = 3(1)^2 - 6(1) - 9 = -12$

Setter inn:

$y - (-1) = -12(x - 1)$

$y = -12x + 12 - 1$

$\underline{y = -12x + 11}$

Oppgave 2 (20%)

Fra læringsutbytte: Finansmatematikk, asymptoter og integrasjon

a) Regn ut det årlige terminbeløpet

$$A = \frac{K * r}{(1 - (1 + r)^{-n}}$$

$K = 50\,000$

R = 0.04

N = 4

$$A = \frac{50\,000 * 0.04}{1 - (1 + 0.04)^{-4}} \approx 13775$$

Det årlige terminbeløpet er 13775

b) Vis at lønn i år t kan skrives ved funksjonen $\boldsymbol{l(t) = 400 * 1.03^t}$, og beregn lønna i år 10.

$Fremtidig\ verdi = Nåverdi * (1 + r)^t$, hvor r er årlig rente = 0.03, t er antall år og Nåverdi er 400 000:

$$\underline{\boldsymbol{l(t) = 400\,000 * (1 + 0.03)^t = 400\,000 * 1.03^t}}$$

c) Vis ved integrasjon hvor mye hun får utbetalt i lønn over 10 år:

$$s(n) = \int_0^n l(t)dt$$

$$s(10) = \int_0^{10} 400\,000 * 1.03^t dt = 400\,000 \int_0^{10} 1.03^t dt$$

$$s(10) = 400\,000 \left[\frac{1.03^t}{\ln(1.03)}\right]_0^{10}$$

$$s(10) = 400\,000 \left[\frac{1.03^{10}}{\ln(1.03)} - \frac{1.03^0}{\ln(1.03)}\right]$$

$$s(10) = 400\,000 \left[\frac{1.03^{10}}{\ln(1.03)} - \frac{1}{\ln(1.03)}\right]$$

$$s(10) = 400\,000 * 11.63 \approx 4.7 mill$$

Hun får utbetalt ca 4.7 millioner over 10 år.

d) Asymptotene til f(x):
H.A for y=0 -> hvis hun er innom jobben veldig mange ganger går betalt per gang mot null
V.A for x+2=0 -> x = -2, hvis hun ikke går på jobben er funksjonen ikke definert og f(x) går mot uendelig.

Oppgave 3 (20%)

Fra læringsutbytte: anvendelse av derivasjon, funksjoner av flere variabler

$K(x) = 0.05x^2 + 2x + 100$

$I(x) = 10x$

a) $\pi(x) = I(x) - K(x)$
$\underline{\pi(x) = 10x - (0.05x^2 + 2x + 100) = -0.05x^2 + 8x - 100}$

b) $\pi(x) = -0.05x^2 + 8x - 100$
$\pi'(x) = -0.1x + 8$
Maks profitt når $\pi'(x) = 0$
$-0.1x + 8 = 0$
$0.1x = 8$
$x = 80$
$\pi(80) = -0.05(80)^2 + 8(80) - 100 = 220$
<u>Maks profitt er 220 når du selger 80 viskelær</u>

c) Vi finner maksimal profitt når de partiell deriverte er lik null.
Partiell deriverer:
$f(x,y) = -0.05(x^2 + y^2) + 8(x + 2y) - 100$
$f_x(x,y) = -0.1x + 8$
$f_y(x,y) = -0.1y + 16$
$f_{xx}(x,y) = -0.1$
$f_{yy}(x,y) = -0.1$
$f_{xy}(x,y) = 0$

d)

Setter de partiell deriverte = 0
$f_x(x,y) = f_y(x,y)$=0
1) $-0.1x + 8 = 0 \quad \rightarrow x = 8/0.1 \quad \rightarrow x = 80$
2) $-0.1y + 16 = 0 \quad \rightarrow y = 16/0.1 \quad \rightarrow y = 160$

Maksimal profitt når du selger 80 viskelær og 160 blyanter. Da er maks profitt:
$$f(80,160) = -0.05(80^2 + 160^2) + 8 * (80 + 160 * 2) - 100 = 1500$$

e)

Kritisk punkt (80,160,1500)
2. derivert testen for å klassifisere punktet:
$A = f_{xx}(x,y) = -0.1 < 0$
$C = f_{yy}(x,y) = -0.1$
$B = f_{xy}(x,y) = 0$

$AC - B^2 = (-0.1) * (-0.1) - 0^2 =$ 0.01>0, og A<0 -> lokalt maksimum

Det følger av 2. derivert testen at du maksimerer profitten når du selger 80 viskelær og 160 blyanter.

f) Finn optimal antall gitt bi-betingelse:
Lagrange funksjonen:

$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$

Setter inn i funksjonen, hvor $g(x, y) = x + y \ og \ c = 200$

$\boldsymbol{L(x, y, \lambda) = -0.05(x^2 + y^2) + 8(x + 2y) - 100 - \lambda((x + y) - 200)}$

$beregner\ de\ partiellderiverte$:

1. $L_x(x, y, \lambda) = -0.1x + 8 - \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 8 - 0.1x$
2. $L_y(x, y, \lambda) = -0.1y + 16 - \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 16 - 0.1y$
3. $L_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 200 = 0 \quad \rightarrow \quad x + y = 200$

Løser ut fra 1 og 2:

$\lambda = \lambda = 8 - 0.1x = 16 - 0.1y$

$0.1x = 0.1y - 8$

$x = y - 80$

Setter inn i 3.

$x + y = 200 = (y - 80) + y$

$2y = 280$

$y = 140, \qquad x = 140 - 80 = 60$

<u>Du maksimerer profitten innenfor bi betingelsen når du selger 140 blyanter og 60 viskelær.</u>

Løsningsforslag statistikkdel eksamen

Statistikk for økonomifag

Høsten 2019

Du har nylig blitt ansatt i firmaet Promotion AS, og ledelsen har gitt deg et sett med oppgaver å løse. Du må vise utregning på alle oppgavene, og om ikke annet er angitt bruker dere 3 desimaler i svarene.

1 Statoppgave 1

a) Hva er medianen, gjennomsnittet, utvalgsvariansen og utvalgsstandardavviket for disse inntektene?

b) Beregn et 95% konfidensintervall for gjennomsnittet i a)

. . . .

$$\begin{aligned}
Median &= \frac{5+1}{2} = 3, \text{verdi} \quad 110 && (1)\\
\bar{X} &= \frac{120+140+110+100+90}{5} && (2)\\
&= 112 && (3)\\
S_X^2 &= \frac{(120-112)^2+(140-112)^2+(110-112)^2+(100-112)^2+(90-112)^2}{5-1} && (4)\\
&= \frac{1480}{4} && (5)\\
&= 370 && (6)\\
S_X &= \sqrt{370} && (7)\\
&= 19,235 && (8)\\
S[\bar{X}] &= \frac{19,235}{\sqrt{5}} && (9)\\
&= 8,602 && (10)\\
t_{0,05/2}^{(5-1)} &= 2,776 && (11)\\
KI[\bar{X}_{95}] &= 112 \pm 2,776 * 8,602 = [88,121 \bullet 135,879] && (12)
\end{aligned}$$

. . . .

c) Beregn korrelasjonskoeffisienten RXY for inntektene fra salg av skinnbukser (X) og olabukser (Y). Utvalgskovariansen (Cov[XY], eller Sxy, er -640).

. . . .

$$R_{XY} = \frac{-640}{19,235 * \sqrt{1955}} = -0,753 \qquad (13)$$

$$(14)$$

. . . .

d) Lag et estimat (p hatt) for sannsynligheten for at en kunde kjøper olabukse(r).

e) Lag et 99% konfidensintervall for p hatt.

$$\hat{p} = \frac{55}{300} = 0,183 \tag{15}$$

$$KI[\hat{p}_{99}] = 0,183 \pm 2,576 * \sqrt{\frac{0,183 * 0,817}{300}} \tag{16}$$

$$= 0,183 \pm 2,576 * 0,022 = [0,125 \bullet 0,24] \tag{17}$$

f) La X være antall bukser en tilfeldig valgt kunde kjøper. Hva er forventet verdi, varians og standardavviket til X?

$$E[X] = 0 * 0,75 + 1 * 0,2 + 2 * 0,04 + 3 * 0,01 = 0,31 \tag{18}$$

$$E[X^2] = 1^2 * 0,2 + 2^2 * 0,04 + 3^2 * 0,01 = 0,45 \tag{19}$$

$$Var[X] = 0,45 - 0,31^2 = 0,354 \tag{20}$$

$$\sigma[X] = \sqrt{0,354} = 0,595 \tag{21}$$

2

a) Hva er forventet antall tyverier (X) i løpet av en uke hvor 300 kunder er innom? Hva er variansen til X?

b) Hva er sannsynligheten for at det blir begått mindre enn 4 tyverier denne måneden?

$$\lambda = 300 * 0,02 = 6 \tag{22}$$

$$E[X] = \lambda = 6 \tag{23}$$

$$Var(X) = \lambda = 6 \tag{24}$$

$$P(X < 4) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) \tag{25}$$

$$P(X = 0) = \frac{6^0}{0!} e^{-6} = 0,00248 \tag{26}$$

$$P(X = 1) = \frac{6^1}{1!} e^{-6} = 0,0149 \tag{27}$$

$$P(X = 2) = \frac{6^2}{2!} e^{-6} = 0,0446 \tag{28}$$

$$P(X = 3) = \frac{6^3}{3!} e^{-6} = 0,0892 \tag{29}$$

$$P(X < 3) = 0,151 \tag{30}$$

$$\tag{31}$$

c) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt kunde handler for mer enn 740 kroner?

d) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt kunde handler for mellom 110 og 500 kroner?

e) Hva er sannsynligheten for at 5 tilfeldig valgte personer handler for mer enn 3000 kroner?

$$
\begin{aligned}
P(Z > 740) =& 1 - P(Z < 740) = 1 - G(\frac{740 - 500}{150}) && (32)\\
=& 1 - G(1,6) && (33)\\
=& 1 - 0,9452 = 0,055 && (34)\\
P(110 < Z < 500) =& P(Z < 500) - P(Z < 110) && (35)\\
=& G(\frac{500 - 500}{150}) - G(\frac{110 - 500}{150}) && (36)\\
=& G(0) - G(-2,6) = G(0) - (1 - G(2,6)) && (37)\\
=& 0,5 - (1 - 0,9953) && (38)\\
=& 0,4953 && (39)\\
P(S > 3000) =& 1 - P(S < 3000) = && (40)\\
=& 1 - G(\frac{3000 - 5 * 500}{\sqrt{5 * 150^2}}) && (41)\\
=& 1 - G(\frac{500}{335,4}) && (42)\\
=& 1 - G(1,49) && (43)\\
=& 1 - 0,9319 && (44)\\
=& 0,0681 && (45)
\end{aligned}
$$

f) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig mannlig kunde kjøper undertøy?

$$
\begin{aligned}
P(U|M) =& P(M|U) * P(U)/P(M) && (46)\\
P(U|M) =& 0,6 * 0,2/0,7 = 0,171 && (47)\\
& && (48)
\end{aligned}
$$

g) Hvor mange forskjellige kombinasjoner av luer på utstilling finnes?

h) Du skal nå velge hvilken rekkefølge de tre dukkene skal stå i. Hvor mange mulige kombinasjoner finnes?

$$
\begin{aligned}
Kombinasjoner =& \binom{10}{6} = 210 && (49)\\
Sortering =& 6! = 720 && (50)
\end{aligned}
$$