SFB107111 - LØSNING PÅ EKSAMEN HØSTEN 2018

Eksamen høsten 2018 Oppgave 1

Anta at 70% av studentene spiller fotball og at 30% ikke spiller fotball.

Anta at av de som spiller fotball så er det 40% som spiller håndball og 60% som ikke spiller håndball.

Anta at av de som ikke spiller fotball så er det 80% som spiller håndball og 20% som ikke spiller håndball.

La F angi begivenheten at en student spiller fotball, og la H angi begivenheten at en student spiller håndball.

$P(F) = 0{,}70 \qquad\qquad P(F^C) = 1 - P(F) = 1 - 0{,}70 = 0{,}30$

A) Hva er $P(H|F)$, $P(H^C|F)$, $P(H|F^C)$ og $P(H^C|F^C)$

$$P(H|F) = \mathbf{0,40}$$
$$P(H^C|F) = \mathbf{0,60}$$
$$P(H|F^C) = \mathbf{0,80}$$
$$P(H^C|F^C) = \mathbf{0,20}$$

B) Hva er $P(H \cap F)$ og $P(H \cap F^C)$

$$P(H \cap F) = P(H|F) * P(F)$$
$$P(H \cap F) = 0{,}40 * 0{,}70$$
$$P(H \cap F) = \mathbf{0,28}$$

$$P(H \cap F^C) = P(H|F^C) * P(F^C)$$
$$P(H \cap F^C) = 0{,}80 * 0{,}30$$
$$P(H \cap F^C) = \mathbf{0,24}$$

C) Hva er sannsynligheten for at en student spiller håndball

skal finne $P(H)$

$$P(H) = P(H \cap F) + P(H \cap F^C)$$
$$P(H) = 0{,}28 + 0{,}24$$
$$P(H) = \mathbf{0,52}$$

eller

$$P(H) = P(H|F) * P(F) + (H|F^C) * P(F^C)$$
$$P(H) = 0{,}40 * 0{,}70 + 0{,}80 * 0{,}30$$
$$P(H) = \mathbf{0,52}$$

D) En student spiller håndball. Hva er sannsynligheten for at denne studenten spiller fotball

skal finne $P(F|H)$

$$P(F|H) = \frac{P(H \cap F)}{P(H)}$$
$$P(F|H) = \frac{0{,}28}{0{,}52}$$
$$P(F|H) = \mathbf{0,5385}$$

eller

$$P(F|H) = \frac{P(H|F) * P(F)}{P(H)}$$
$$P(F|H) = \frac{0{,}40 * 0{,}70}{0{,}52}$$
$$P(F|H) = \mathbf{0,5385}$$

Eksamen høsten 2018 Oppgave 2

La X være antall timer en sportsfisker tilbringer på favorittfiskestedet sitt. Anta at X har følgende sannsynlighetsfordeling:

Antall timer	1	2	3	4
Sannsynlighet	0,10	0,20	0,30	0,40

A) Finn $E(X)$

$$E(X) = \sum x * P(X = x)$$
$$E(X) = 1 * 0{,}10 + 2 * 0{,}20 + 3 * 0{,}30 + 4 * 0{,}40$$
$$E(X) = 0{,}10 + 0{,}40 + 0{,}90 + 1{,}60$$
$$E(X) = \mathbf{3,00}$$

B) Finn $E(X^2)$

$$E(X^2) = \sum x^2 * P(X = x)$$
$$E(X^2) = 1^2 * 0{,}10 + 2^2 * 0{,}20 + 3^2 * 0{,}30 \; + 4^2 * 0{,}40$$
$$E(X^2) = 0{,}10 + 0{,}80 + 2{,}70 + 6{,}40$$
$$E(X^2) = \mathbf{10,00}$$

C) Finn $VAR(X)$

$$VAR(X) = \; E(X^2) - E(X)^2$$
$$VAR(X) = \; 10{,}00 - 3{,}00^2$$
$$VAR(X) = \mathbf{1,00}$$

D) Anta at å fiske på dette fiskestedet koster 100,- i grunnavgift per gang og 20,- per påbegynt time.
La Y være totale kostander per gang for fisking.
Finn $E(Y)$

$$Y = 100 + 20X$$

$$E(Y) = E(100 + 20X)$$

$$E(Y) = 100 + 20 * E(X) \qquad\qquad E(a + bX) = a + b * E(X)$$
$$E(Y) = 100 + 20 * 3{,}00$$
$$E(Y) = \mathbf{160}$$

Eksamen høsten 2018 Oppgave 3

A) En bedrift har tilbudt økonomistudenter å gjennomføre bacheloroppgaven sin i bedriften. 50 studenter har meldt sin interesse og 4 av disse trekkes helt tilfeldig ut for å bli innkalt til samtale. Hvor mange kombinasjoner finnes.

$N = 50$ studenter	$n = 4$ trekkes ut
UORDNET utvalg	(rekkefølgen spiller ingen rolle – alle blir innkalt til samtale)
UTEN tilbakelegging	(samme student kan ikke trekkes flere ganger)

antall kombinasjoner = $\binom{N}{n} = \frac{N*(N-1)*(N-2)*\ldots}{1*2*\ldots*n}$

antall kombinasjoner = $\binom{50}{4} = \frac{50*49*48*47}{1*2*3*4}$

antall kombinasjoner = $\mathbf{230\ 300}$

B) En bedrift har tilbudt økonomistudenter å gjennomføre bacheloroppgaven sin i bedriften. 50 studenter har meldt sin interesse og 4 av disse trekkes helt tilfeldig ut for å bli innkalt til samtale. Den første som trekkes ut får velge tema først. Den andre som trekkes ut får velge tema som nummer 2 o.s.v.. Hvor mange kombinasjoner finnes.

$N = 50$ studenter	$n = 4$ trekkes ut
ORDNET utvalg	(rekkefølgen spiller en rolle p.g.a. rekkefølgen i valg av tema)
UTEN tilbakelegging	(samme søker kan ikke trekkes flere ganger)

antall kombinasjoner = $N * (N-1) * (N-2) * \ldots$ (til det er n faktorer)

antall kombinasjoner = $50 * 49 * 48 + 47$

antall kombinasjoner = $\mathbf{5\ 527\ 200}$

Anta at X er poisson-fordelt med parameter $\lambda = 3$.

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} * e^{-\lambda} = \frac{3^x}{x!} * e^{-3}$$

C) Hva er $P(X > 1)$

$$P(X = 0) = \frac{3^0}{0!} * e^{-3} = 0{,}0498$$

$$P(X = 1) = \frac{3^1}{1!} * e^{-3} = 0{,}1494$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

$$P(X > 1) = 1 - 0{,}0498 - 0{,}1494$$

$$P(X > 1) = \mathbf{0{,}8009}$$

D) Finn $E(X^2)$

$E(X^2) = E(X)^2 + VAR(X)$ fordi $VAR(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$E(X^2) = 3^2 + 3$ $E(X) = VAR(X) = \lambda = 3$

$E(X^2) = \mathbf{12}$

Eksamen høsten 2018 Oppgave 4

Anta at 80% av alle studenter har jobb ved siden av studiene. Anta at du har spurt 8 tilfeldig valgte studenter om de har jobb ved siden av studiene.

La X = antall som har jobb ved siden av studiene. Anta at X er binomisk fordelt

Dette er en binomisk situasjon med
$n = 8$ (antall spurte)
$p = 0{,}80$ (sannsynligheten for å ha jobb ved siden av studiene)

$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{8}{x} 0{,}8^x 0{,}2^{8-x}$

A) Finn $E(X)$ og $VAR(X)$

$E(X) = np$
$E(X) = 8 * 0{,}8$
$E(X) = \mathbf{6,40}$

$VAR(X) = np(1-p)$
$VAR(X) = 8 * 0{,}8 * 0{,}2$
$VAR(X) = \mathbf{1,28}$

B) Hva er sannsynligheten for at alle de spurte har jobb ved siden av studiene

skal finne $P(X = 8)$

$P(X = 8) = \binom{8}{8} 0{,}8^8 0{,}2^{8-8}$
$P(X = 8) = 1 * 0{,}8^8 * 1$
$P(X = 8) = \mathbf{0,1678}$

C) Hva er sannsynligheten for at halvparten av de spurte har jobb ved siden av studiene

skal finne $P(X = 4)$

$P(X = 4) = \binom{8}{4} 0{,}8^4 0{,}2^{8-4}$
$P(X = 4) = 70 * 0{,}8^4 * 0{,}2^4$ $\qquad \binom{8}{4} = \frac{8*7*6*5}{1*2*3*4} = 70$
$P(X = 4) = \mathbf{0,0459}$

Eksamen høsten 2018 Oppgave 4

D) Hva er sannsynligheten for at høyst 6 av de spurte har jobb ved siden av studiene

skal finne $P(X \leq 6)$

$P(X = 8) = 0{,}1678$ fra oppgave B

$P(X = 7) = \binom{8}{7} 0{,}8^7 0{,}2^{8-7}$

$P(X = 7) = 8 * 0{,}8^7 * 0{,}2$ $\binom{8}{4} = \frac{8*7*6*5*4*3*2}{1*2*3*4*5*6*7} = 8$

$P(X = 7) = 0{,}3355$

$P(X \leq 6) = 1 - P(X > 6) = 1 - P(X = 7) - P(X = 8)$

$P(X \leq 6) = 1 - 0{,}3355 - 0{,}1678$

$P(X \leq 6) = \mathbf{0,4967}$

Eksamen høsten 2018 Oppgave 5

Anta at antall kilometer reisevei en ansatt har til universitetet er normalfordelt med parametre $\mu = 25$ og $\sigma = 3$

X = antall kilometer reisevei
$\mu = 25$
$\sigma = 3$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 25}{3}$$

A) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt ansatt har mer enn 33 kilometer reisevei

skal finne $P(X \geq 33)$
$X = 33$ gir $Z = \frac{33-25}{3} = 2{,}67$

$P(X \geq 33) = P(Z \geq 2{,}67)$
$P(X \geq 33) = 1 - P(Z \leq 2{,}67)$
$P(X \geq 33) = 1 - 0{,}9962$
$P(X \geq 33) = \mathbf{0{,}0038}$

B) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt ansatt har mer enn 20 kilometer reisevei

skal finne $P(X \geq 20)$
$X = 20$ gir $Z = \frac{20-25}{3} = -1{,}67$

$P(X \geq 20) = P(Z \geq -1{,}67)$
$P(X \geq 20) = P(Z \leq 1{,}67)$
$P(X \geq 20) = \mathbf{0{,}9525}$

C) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt ansatt har mellom 23 og 29 kilometer reisevei

skal finne $P(23 \leq X \leq 29)$
$X = 23$ gir $Z = \frac{23-25}{3} = -0{,}67$
$X = 29$ gir $Z = \frac{29-25}{3} = 1{,}33$

$P(23 \leq X \leq 29) = P(-0{,}67 \leq Z \leq 1{,}33)$
$P(23 \leq X \leq 292) = P(Z \leq 1{,}33) - P(Z \leq -0{,}67)$
$P(23 \leq X \leq 29) = P(Z \leq 1{,}33) - (1 - P(Z \leq 0{,}67))$
$P(23 \leq X \leq 29) = 0{,}9082 - (1 - 0{,}7486)$
$P(23 \leq X \leq 29) = 0{,}9082 - 0{,}2514$
$P(23 \leq X \leq 29) = \mathbf{0{,}6568}$

Eksamen høsten 2018 Oppgave 5

D) Hva er sannsynligheten for at 3 tilfeldig valgte ansatte i gjennomsnitt har mindre enn 20 kilometer reisevei

La $\overline{X}$ = gjennomsnittlig antall kilometer reisevei for $n = 3$ tilfeldig valgte ansatte

skal finne $P(\overline{X} \leq 20)$

$$P(\overline{X} \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$P(\overline{X} \leq 20) = P\left(Z \leq \frac{20-25}{\frac{3}{\sqrt{3}}}\right)$$

$$P(\overline{X} \leq 20) = P(Z \leq -2{,}89)$$

$$P(\overline{X} \leq 20) = 1 - P(Z \leq 2{,}89)$$

$$P(\overline{X} \leq 20) = 1 - 0{,}9981$$

$$P(\overline{X} \leq 20) = \mathbf{0{,}0019}$$

Eksamen høsten 2018 Oppgave 6

A) Anta at 60 av 120 studenter som startet på økonomiutdanning for ett år siden har bestått eksamen i både matematikk og statistikk.

Beregn et 95% konfidensintervall for andelen studenter som har bestått eksamen i både matematikk og statistikk

Utgangspunkt
$X = 60$
$n = 120$

Konfidensintervall
$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$ (tabell 5, $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$)

95% konf.int. for p = $\frac{X}{n} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} * \sqrt{\frac{\frac{X}{n}(1-\frac{X}{n})}{n}}$

95% konf.int. for p = $\frac{60}{120} \pm 1{,}96 * \sqrt{\frac{\frac{60}{120}(1-\frac{60}{120})}{120}}$

95% konf.int. for p = $\mathbf{0,500 \pm 0,089}$

B) Anta at du har undersøkt antall studiepoeng studenter har etter ett år på en økonomiutdanning og at undersøkelsen ga følgende resultater:

$\overline{X} = 45$
$S_X = 5$
$n = 24$

Beregn et 95% konfidensintervall for gjennomsnittlig antall studiepoeng

Konfidensintervall

$t_{\frac{\alpha}{2}}^{(\nu)} = 2{,}069$ (tabell 8,$\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$, $\nu = n - 1 = 24 - 1 = 23$)

95% konf.int. for μ = $\overline{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}^{(\nu)} * \frac{S_X}{\sqrt{n}}$

95% konf.int. for μ = $45 \ \pm 2{,}069 * \frac{5}{\sqrt{24}}$

95% konf.int. for μ = $\mathbf{45 \pm 2,11}$

Eksamen høsten 2018 Oppgave 7

Anta at 60 av 120 studenter som startet på økonomiutdanning for ett år siden har bestått eksamen i både matematikk og statistikk.

A) Foreta en hypotesetest på 5% nivå for å avgjøre om andelen studenter som har bestått eksamen i både matematikk og statistikk er over 40%.

Utgangspunkt
$X = 60$
$n = 120$

Hypotese
$\boldsymbol{H_0: p = 0,4}$
$\boldsymbol{H_A: p > 0,4}$ (andelen er over 40%)

Kritisk verdi
$z_\alpha = \mathbf{1,645}$ (tabell 5, $\alpha = 0,05$ p.g.a. ensidig test)

Testobservator
$Z = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$
$Z = \frac{60 - 120 * 0,4}{\sqrt{120 * 0,4(1-0,4)}}$
$Z = \mathbf{2,236}$

Resultat
Forkast H_0 hvis $|Z| \geq z_\alpha$ d.v.s. Forkast H_0 hvis $|2,236| \geq 1,645$
Påstå $\boldsymbol{H_A: p > 0,4}$

B) Beregn signifikanssannsynligheten (P-verdien) i forbindelse med hypotesetesten i punkt A

P-verdi = $P(Z > |testobservator|)$
P-verdi = $P(Z \geq |2,236|)$
P-verdi = $1 - P(Z \leq 2,24)$
P-verdi =$1 - 0,9875$
P-verdi = $\mathbf{0,0125}$