Høgskolen i Østfold

EKSAMEN

Emnekode:	Emnenavn:
SFB10711	Metodekurs I: Grunnleggende matematikk og statistikk. Deleksamen 1: Individuell, skriftlig fire timers eksamen i matematikk
Dato: 07.06.2019	**Eksamenstid:** 09.00-13.00
Hjelpemidler: Godkjent kalkulator og vedlagt formelsamling	**Faglærer:** Bjørnar Karlsen Kivedal

Om eksamensoppgaven og poengberegning:

Oppgavesettet består av fem sider inklusiv denne forsiden og vedlagte formler.

Kontroller at oppgaven er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av seks oppgaver. Alle oppgavene skal besvares og teller like mye ved sensureringen.

Dersom noe er uklart eller mangler i oppgavene inngår det som en del av oppgaven å ta de nødvendige forutsetninger.

Sensurfrist: xx.06.2019

Karakterene er tilgjengelige for studenter på Studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. www.hiof.no/studentweb

Oppgave 1

a) Løs ligningen $x^2 - 4x = 0$
b) Løs ligningen $3x^2 + 8x - 3 = 0$
c) Løs ligningssystemet

$$3x - 2y = 7$$
$$x - 2y = 1$$

d) Gitt $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 19x + 6$. Regn ut $f(2)$ og bruk dette til å løse ligningen $f(x) = 0$.

Oppgave 2

Finn $f'(x)$ og skriv så enkelt som mulig når

a) $f(x) = x^2 + x + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$
b) $f(x) = x^2(\sqrt{x} + 2x)$
c) $f(x) = (2x^2 + 1)^3 + 4x^2$
d) $f(x) = e^{x^2+2x}$

Oppgave 3

Du kjøper en veteranbil for 150 000 kr, og antar at denne øker i verdi med 5% per år siden veteranbiler ofte stiger i verdi.

a) Hva er bilen verdt etter fem år?
b) Beregn ved logaritmeregning hvor mange år det tar før bilen er verdt 210 000 kr. Rund av til nærmeste hele år.

Vi låner 200 000 kr til en rente på 7% per år med et annuitetslån. Terminbeløp skal betales en gang i året og første gang om ett år, og det er totalt 20 terminbeløp.

c) Hva blir terminbeløpet?
d) Like etter at det sjette terminbeløpet er betalt, blir renta satt ned til 5%. Hva blir det nye terminbeløpet?

Oppgave 4

La $I(x) = -0{,}1x^2 + 85x$ være inntekten ved x solgte varer og la $K(x) = 0{,}05x^2 + 25x + 2000$ være kostnaden ved å produsere x enheter av denne varen.

a) Finn grensekostandsfunksjonen
b) Beregn grensekostnaden når $x = 50$ og tolk verdien
c) Finn profittfunksjonen
d) Beregn når profitten blir størst og hva profitten blir i det tilfellet.

Oppgave 5

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3$

a) Finn hvor f er voksende og avtakende
b) Finn lokale maksimums- og minimumspunkter og funksjonsverdien i punktene
c) Finn hvor f er konkav og konveks, samt vendepunkt til f
d) Finn tangentligningen til f i punktet $x = 1$

Oppgave 6

Vi har funksjonen $f(x, y) = 2x^3 - x^2y + y^2$

a) Finn de partielle deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen f
b) Finn de to lokale stasjonære punktene til funksjonen f
c) Klassifiser det av de to punktene du fant i b) som hadde den høyeste verdien på x

Formelsamling:

Potenser

$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad (n\ a\text{-er})$

$a^0 = 1$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$(\frac{a}{b})^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Kvadratsetninger

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Andregradslikningen

$ax^2 + bx + c = 0$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Disse røttene, x_1 og x_2, passer i:
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Rette linjer

$y = ax + b$

Ettpunktsformel: $y - y_1 = a(x - x_1)$

Topunktsformel: $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

Tangentformel: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

L'Hôpitals regel

Anta at grensen $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ eller ∞, og at $\lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ eksisterer. (Grensen kan godt være ∞ eller $-\infty$.)
Da er

$\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Logaritmefunksjoner

a^x omvendt funksjon $\log_a x$.

e^x omvendt funksjon $\ln x$.

Regneregler:

$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$

$\log_a(x^k) = k \log_a(x)$

$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

$\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$

$\ln(x^k) = k \ln(x)$

(Vi dropper ofte parentesene $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$)

Derivasjonsregler

$g(x) = k \cdot f(x)$ gir $g'(x) = k \cdot f'(x)$

$h(x) = g(x) + f(x)$ gir $h'(x) = g'(x) + f'(x)$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(\frac{u}{v})' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Kjerneregelen for derivasjon:

La $h(x) = f(g(x))$ gir $h'(x) = f'(u)g'(x)$, hvor $u = g(x)$.

Deriverte til utvalgte funksjoner

$f(x) = k,\ f'(x) = 0$

$f(x) = ax + b,\ f'(x) = a$

$f(x) = x^n,\ f'(x) = nx^{n-1}$

$f(x) = \dfrac{1}{x},\ f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

$f(x) = \sqrt{x}\ (= x^{\frac{1}{2}}),\ f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x$

$f(x) = e^{u(x)},\ f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$

$f(x) = \ln x,\ f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f(x) = \ln u(x),\ f'(x) = \dfrac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$

Elastisitet

La $f(x)$ være en kontinuerlig deriverbar funksjon av x. Da er $El_x f(x) = \dfrac{x}{f(x)} f'(x)$.

Rekker og finansmatematikk

Bankformel: Setter du inn et beløp A i banken med rente r per år, har beløpet vokst til $A(1+r)^n$ hvor n er antall år.

Sum aritmetisk rekke:
$S(n) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = n(a_1 + \frac{(n-1)d}{2})$, hvor $d = a_{n+1} - a_n$.

Ledd nummer n aritmetisk rekke: $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Sum geometrisk rekke:
$S(n) = a_1 \frac{1-k^n}{1-k}$, hvor $k = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

En geometrisk rekke med uendelig mange ledd er konvergent for $-1 < k < 1$, og summen er: $S = a_1 \frac{1}{1-k}$

Nåverdi av A om t tidsperioder: $\frac{A}{(1+r)^t}$

Kontinuerlig forrenting: $A_t = A_0 e^{rt}$

Nåverdi betalingstrøm (n utbetalinger, første utbetaling er om en tidsperiode): $S = A\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$

Nåverdi betalingstrøm (n utbetalinger, første utbetaling umiddelbart):
$S = A(1+r)\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$

Nåverdi betalingstrøm (evig, første utbetaling er om en tidsperiode): $S = \frac{A}{r}$

Nåverdi betalingstrøm (evig, første utbetaling umiddelbart): $S = \frac{A(1+r)}{r}$

Formel for terminbeløp ved annuitetslån: $A = K\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$

Funksjonsanalyse for funksjoner i to variabler

Kandidater for (lokale) topp og bunn: $f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$

Test: $\Delta > 0, A > 0$ bunn, $\Delta > 0, A < 0$ topp, $\Delta < 0$ sadel.

($\Delta = AC - B^2$, hvor $A = f''_{xx}(x,y), B = f''_{xy}(x,y), C = f''_{yy}(x,y)$)

Totalderivert-formel: $z = f(x(t), y(t))$ gir $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$

Derivert til nivåkurve $f(x,y) =$ konstant: $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}$

Lagrange funksjon: $L(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)$

Likningssystem for kandidater til maks/min $f(x,y)$ gitt $g(x,y) = c$.

I. $f'_x(x,y) - \lambda g'_x(x,y) = 0$

II. $f'_y(x,y) - \lambda g'_y(x,y) = 0$

III. $g(x,y) = c$

Integrasjon

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + K$ (dersom $n \neq -1$)

$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = ln|x| + K$ (dersom $n = -1$)

$\int e^x dx = e^x + K$

Delvis integrasjon: $\int u' \cdot v dx = (u \cdot v) - \int u \cdot v' dx$

Eksempel (Substitusjon): $\int e^{2x} dx$, $u = 2x$ gir $\int e^u \frac{1}{2} du = \frac{1}{2}e^u + K = \frac{1}{2}e^{2x} + K$. ($\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du$)

Eksempel (Delbrøk): $\int \frac{2}{x^2-1}dx$, skriv $\frac{2}{x^2-1}$ som $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ og finn A og B.

Bestemt integral:
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, hvor $F'(x) = f(x)$.

Økonomibegreper og formler

Profittfunksjon: $\pi(x) = I(x) - K(x)$ (ofte: $I(x) = px$)

Grenseprofitt: $\pi'(x)$
Grenseinntekt: $I'(x)$
Grensekostnad: $K'(x)$

Enhetskostnad: $A(x) = \dfrac{K(x)}{x}$.

Differensiallikninger

$y' + p(x)y = q(x)$

Integrerende faktor: $e^{\int p(x)dx}$

Formel for løsning: $y(x) = \dfrac{1}{e^{\int p(x)dx}} \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx$

Taylorpolynom: $f(x) = p_n(x) + R_{n+1}(x)$ hvor $p_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

For en geometrisk rekke: $a_{n+1} = ka_n$