EKSAMEN

Emnekode:	**Emnenavn:**
SFB10711	Metodekurs I: Grunnleggende matematikk og statistikk. Deleksamen 1: Individuell, skriftlig fire timers eksamen i matematikk
Dato: 27.11.2018	**Eksamenstid:** 09.00-13.00
Hjelpemidler: Godkjent kalkulator og vedlagt formelsamling	**Faglærer:** Bjørnar Karlsen Kivedal

Om eksamensoppgaven og poengberegning:

Oppgavesettet består av fem (5) sider inklusiv denne forsiden og vedlagte formler.

Kontroller at oppgaven er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av seks (6) oppgaver. Alle oppgavene skal besvares og teller som angitt i oppgaveteksten ved sensureringen.

Dersom noe er uklart eller mangler i oppgavene inngår det som en del av oppgaven å ta de nødvendige forutsetninger.

Sensurfrist: 18.12.2018

Karakterene er tilgjengelige for studenter i Studentweb.

Oppgave 1 (teller 18%)

a) Finn nullpunktene til $(\ ) = 2\ ^{2} - 5\ \ + 3$

b) Løs ligningen $2\ ^{3} - \ ^{2} - 7\ \ + 6 = 0$ når $\ = -2$ er en løsning

c) Løs ulikheten $\ + 3 < 3$

Du har tatt opp kr 224 000 i studielån gjennom Statens lånekasse. Anta at lånet er et annuitetslån med 20 års nedbetaling og 5,5% rente per år og årlige terminer.

d) Finn terminbeløpet *(angi svaret med to desimaler)*

e) Hvor mye betales i renter totalt? *(angi svaret med to desimaler)*

Oppgave 2 (teller 18%)

Vi har funksjonen

$(\ ) = \ ^{3} - 3\ ^{2} + 6$ der $-4 \leq \ \ \leq 4$

a) Finn eventuelle lokale og globale maksimums- og minimumspunkter med tilhørende verdier, samt hvor funksjonen vokser og hvor den avtar.

b) Finn vendepunktet for funksjonen og hvor funksjonen er konveks og konkav.

c) Finn ligningen for tangenten i vendepunktet

Oppgave 3 (teller 12%)

a) Finn den deriverte til

$$(\ ) = \ln(\ ^{3} + 3\ \ ^{2})$$

b) Finn den deriverte til

$$(\ ) = \frac{3}{\ ^{2} + 4}$$

c) Finn den deriverte til

$$h(\ ) = \sqrt{\ } + \frac{2}{\ ^{2}}$$

Oppgave 4 (teller 16%)

Kostnadene ved å produsere x enheter av en vare er gitt ved

$(\ ) = 0{,}5\ ^{2} + 20\ \ + 300$ der $0 \leq \ \ \leq 100$

a) Bestem grensekostnaden

b) Finn for hvilket antall produserte enheter enhetskostnaden er minst (rund av svaret til nærmeste heltall)

Salgsprisen er 50 per enhet.

c) Hva blir profittfunksjonen?

d) For hvilken x blir profitten størst? Regn ut profitten.

Oppgave 5 (teller 18%)

Angi svarene i denne oppgaven med to desimaler.

Norges utslipp av klimagasser var i 2017 på 52,4 millioner tonn CO2-ekvivalenter, ifølge foreløpige tall fra Statistisk sentralbyrå.

a) Dersom utslippene forventes å øke med 1% pr år, hva blir forventet utslipp i 2022?
b) Hva er i så fall de totale utslippene i perioden 2017-2022 samlet sett?
c) Dersom utslippene forventes å avta med 1% pr år, hva blir forventet utslipp i 2022?
d) Hvor lang tid tar det i så fall før utslippene er halvert?

Oppgave 6 (teller 18%)

En funksjon   er gitt ved

$$(\ ,\ ) = 4 - 2\ ^{2} + 8\ \ + 2xy - \ ^{2}$$

a) Bestem de partielle deriverte av 1. og 2. orden.
b) Finn og klassifiser eventuelle stasjonære punkter til $(\ ,\ )$

Funksjonen   er en profittfunksjon for en bedrift som produserer to varer, og variablene   og   angir mengden av vare de to varene.

c) Hvilken kombinasjon av x og y gir maksimal profitt for bedriften dersom vi i tillegg har at råstofftilgangen er begrenset slik at betingelsen $3\ \ + 6\ \ = 23$ også må være oppfylt?

Formelsamling:

Potenser

$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad (n \text{ } a\text{-er})$

$a^0 = 1$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Kvadratsetninger

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Andregradslikningen

$ax^2 + bx + c = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Disse røttene, x_1 og x_2, passer i:
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Rette linjer

$y = ax + b$

Ettpunktsformel: $y - y_1 = a(x - x_1)$

Topunktsformel: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

Tangentformel: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

L'Hôpitals regel

Anta at grensen $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ eller ∞, og at $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ eksisterer. (Grensen kan godt være ∞ eller $-\infty$.)
Da er

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Logaritmefunksjoner

a^x omvendt funksjon $\log_a x$.

e^x omvendt funksjon $\ln x$.

Regneregler:

$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$

$\log_a(x^k) = k \log_a(x)$

$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

$\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$

$\ln(x^k) = k \ln(x)$

(Vi dropper ofte parentesene $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$)

Derivasjonsregler

$g(x) = k \cdot f(x)$ gir $g'(x) = k \cdot f'(x)$

$h(x) = g(x) + f(x)$ gir $h'(x) = g'(x) + f'(x)$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Kjerneregelen for derivasjon:

La $h(x) = f(g(x))$ gir $h'(x) = f'(u)g'(x)$, hvor $u = g(x)$.

Deriverte til utvalgte funksjoner

$f(x) = k,\ f'(x) = 0$

$f(x) = ax + b,\ f'(x) = a$

$f(x) = x^n,\ f'(x) = nx^{n-1}$

$f(x) = \frac{1}{x},\ f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f(x) = \sqrt{x}\ (= x^{\frac{1}{2}}),\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x$

$f(x) = e^{u(x)},\ f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$

$f(x) = \ln x,\ f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \ln u(x),\ f'(x) = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$

Elastisitet

La $f(x)$ være en kontinuerlig deriverbar funksjon av x. Da er $El_x f(x) = \dfrac{x}{f(x)} f'(x)$.

Rekker og finansmatematikk

Bankformel: Setter du inn et beløp A i banken med rente r per år, har beløpet vokst til $A(1+r)^n$ hvor n er antall år.

Sum aritmetisk rekke:
$S(n) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = n(a_1 + \frac{(n-1)d}{2})$, hvor $d = a_{n+1} - a_n$.

Ledd nummer n aritmetisk rekke: $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Sum geometrisk rekke:
$S(n) = a_1 \frac{1-k^n}{1-k}$, hvor $k = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

En geometrisk rekke med uendelig mange ledd er konvergent for $-1 < k < 1$, og summen er: $S = a_1 \frac{1}{1-k}$

Nåverdi av A om t tidsperioder: $\frac{A}{(1+r)^t}$

Kontinuerlig forrenting: $A_t = A_0 e^{rt}$

Nåverdi betalingstrøm (n utbetalinger, første utbetaling er om en tidsperiode): $S = A\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$

Nåverdi betalingstrøm (n utbetalinger, første utbetaling umiddelbart):
$S = A(1+r)\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$

Nåverdi betalingstrøm (evig, første utbetaling er om en tidsperiode): $S = \frac{A}{r}$

Nåverdi betalingstrøm (evig, første utbetaling umiddelbart): $S = \frac{A(1+r)}{r}$

Formel for terminbeløp ved annuitetslån: $A = K\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$

Funksjonsanalyse for funksjoner i to variabler

Kandidater for (lokale) topp og bunn: $f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$

Test: $\Delta > 0, A > 0$ bunn, $\Delta > 0, A < 0$ topp, $\Delta < 0$ sadel.

($\Delta = AC - B^2$, hvor $A = f''_{xx}(x,y), B = f''_{xy}(x,y), C = f''_{yy}(x,y)$)

Totalderivert-formel: $z = f(x(t), y(t))$ gir $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$

Derivert til nivåkurve $f(x,y) =$ konstant: $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}$

Lagrange funksjon: $L(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)$

Likningssystem for kandidater til maks/min $f(x,y)$ gitt $g(x,y) = c$.

I. $f'_x(x,y) - \lambda g'_x(x,y) = 0$

II. $f'_y(x,y) - \lambda g'_y(x,y) = 0$

III. $g(x,y) = c$

Integrasjon

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + K$ (dersom $n \neq -1$)

$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = ln|x| + K$ (dersom $n = -1$)

$\int e^x dx = e^x + K$

Delvis integrasjon: $\int u' \cdot v dx = (u \cdot v) - \int u \cdot v' dx$

Eksempel (Substitusjon): $\int e^{2x} dx$, $u = 2x$ gir $\int e^u \frac{1}{2} du = \frac{1}{2}e^u + K = \frac{1}{2}e^{2x} + K$. ($\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du$)

Eksempel (Delbrøk): $\int \frac{2}{x^2-1} dx$, skriv $\frac{2}{x^2-1}$ som $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ og finn A og B.

Bestemt integral:
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, hvor $F'(x) = f(x)$.

Økonomibegreper og formler

Profittfunksjon: $\pi(x) = I(x) - K(x)$ (ofte: $I(x) = px$)

Grenseprofitt: $\pi'(x)$
Grenseinntekt: $I'(x)$
Grensekostnad: $K'(x)$

Enhetskostnad: $A(x) = \dfrac{K(x)}{x}$.

Differensiallikninger

$y' + p(x)y = q(x)$

Integrerende faktor: $e^{\int p(x)dx}$

Formel for løsning: $y(x) = \dfrac{1}{e^{\int p(x)dx}} \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx$

Taylorpolynom: ( ) = ( ) + $_{+1}$( ) hvor ( ) = (0) + $\frac{'(0)}{1!}$ + $\frac{''(0)}{2!}$ ^{2} + ⋯ + $\frac{(\ )(0)}{!}$

For en geometrisk rekke: $_{+1}$ =