Høgskolen i Østfold

EKSAMEN

Emnekode:	**Emnenavn:**
SFB10711	Metodekurs I: Grunnleggende matematikk og statistikk. Deleksamen 1: Individuell, skriftlig fire timers eksamen i matematikk
Dato: 27.02.2019	**Eksamenstid:** 09.00-13.00
Hjelpemidler: Godkjent kalkulator og vedlagt formelsamling	**Faglærer:** Bjørnar Karlsen Kivedal

Om eksamensoppgaven og poengberegning:

Oppgavesettet består av 5 sider inklusiv denne forsiden og vedlagte formler.

Kontroller at oppgaven er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 6 oppgaver. Alle oppgavene skal besvares og teller like mye ved sensureringen.

Dersom noe er uklart eller mangler i oppgavene inngår det som en del av oppgaven å ta de nødvendige forutsetninger.

Sensurfrist: 19.03.2019

Karakterene blir publisert i Studentweb.

Oppgave 1

a) Løs ligningen $3x^2 + 8x - 3 = 0$

b) Løs ligningssystemet

$$2x + 2y = 2$$
$$-x + y = 3$$

c) Løs ulikheten

$$\frac{x+1}{x-3} > 0$$

d) Finn ligningen for skråasymptoten til

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x + 1}$$

Oppgave 2

Deriver funksjonene:

a) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

b) $f(x) = x^2 \cdot \ln 2x$

c) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (3x-1)^2$

d) $f(x) = e^{2x} + \frac{1}{x^2}$

Oppgave 3

Du tar opp et lån på 100 000 kroner til 6% rente per år. Lånet skal tilbakebetales etter annuitetsprinsippet med 10 like store årlige beløp.

a) Hvor stort er det årlige beløpet når første betaling skjer ett år etter låneopptak?

Et beløp på 30 000 kroner forrentes med 3% årlig rente (du skal ikke regne med kontinuerlig rente).

b) Hva har beløpet vokst til etter 10 år?

c) Hvor lang tid tar det før beløpet har doblet seg?

d) Hvilket beløp må settes i banken i dag for at beløpet skal ha blitt til 60 000 kroner etter 10 år (med 3% rente)?

Oppgave 4

En bedrift har at kostnadene ved å produsere x enheter av en vare er gitt ved

$$K(x) = 20\,000 + 12x + 0{,}001x^2 \qquad 0 \leq x \leq 5\,000$$

a) Beregn for hvilket antall enheter enhetskostnaden er minst mulig og finn hva enhetskostnaden er i det tilfellet.

b) Finn et uttrykk for grensekostnaden og beregn hva grensekostnaden er der enhetskostnaden er minst mulig.

Inntekten ved salg av x enheter av denne varen er gitt ved

$$I(x) = 30x - 0{,}002x^2$$

c) Finn et uttrykk for profittfunksjonen $\pi(x)$. Beregn når profitten er størst mulig og hva profitten er i dette tilfellet.

Oppgave 5

Vi har funksjonen $f(x) = x^3 - 3x^2$, $D_f = R$

a) Finn funksjonens nullpunkt
b) Når er funksjonen voksende og avtakende? Finn eventuelle maksimums- eller minimumspunkter
c) Når er funksjonen konveks og konkav?
d) Finn ligningen for tangenten i funksjonens vendepunkt

Oppgave 6

En bedrift produserer to produkter, vare 1 og vare 2. La x være antall enheter som selges av vare 1 og y antall enheter som selges av vare 2. De totale inntektene ved å selge x enheter av vare 1 og y enheter av vare 2 er gitt ved

$$f(x, y) = -2x^2 - 2xy - 3y^2 + 300x + 400y$$

a) Hvor mye bør bedriften selge av de to varene for å oppnå maksimal inntekt? Vis at du har funnet en maksimumspunkt (toppunkt) for inntekten. Hva blir den totale inntekten?
b) Anta at bibetingelsen $x + y = 70$ skal gjelde. Hvor mye bør bedriften nå selge av de to varene for å oppnå maksimal inntekt?

Formelsamling:

Potenser

$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad (n\ a\text{-er})$

$a^0 = 1$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Kvadratsetninger

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Andregradslikningen

$ax^2 + bx + c = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Disse røttene, x_1 og x_2, passer i:
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Rette linjer

$y = ax + b$

Ettpunktsformel: $y - y_1 = a(x - x_1)$

Topunktsformel: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

Tangentformel: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

L'Hôpitals regel

Anta at grensen $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ eller ∞, og at $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ eksisterer. (Grensen kan godt være ∞ eller $-\infty$.)
Da er

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Logaritmefunksjoner

a^x omvendt funksjon $\log_a x$.

e^x omvendt funksjon $\ln x$.

Regneregler:

$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$

$\log_a(x^k) = k \log_a(x)$

$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

$\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$

$\ln(x^k) = k \ln(x)$

(Vi dropper ofte parentesene $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$)

Derivasjonsregler

$g(x) = k \cdot f(x)$ gir $g'(x) = k \cdot f'(x)$

$h(x) = g(x) + f(x)$ gir $h'(x) = g'(x) + f'(x)$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Kjerneregelen for derivasjon:

La $h(x) = f(g(x))$ gir $h'(x) = f'(u)g'(x)$, hvor $u = g(x)$.

Deriverte til utvalgte funksjoner

$f(x) = k,\ f'(x) = 0$

$f(x) = ax + b,\ f'(x) = a$

$f(x) = x^n,\ f'(x) = nx^{n-1}$

$f(x) = \frac{1}{x},\ f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f(x) = \sqrt{x}\ (= x^{\frac{1}{2}}),\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x$

$f(x) = e^{u(x)},\ f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$

$f(x) = \ln x,\ f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \ln u(x),\ f'(x) = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$

Elastisitet

La $f(x)$ være en kontinuerlig deriverbar funksjon av x. Da er $El_x f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x)$.

Rekker og finansmatematikk

Bankformel: Setter du inn et beløp A i banken med rente r per år, har beløpet vokst til $A(1+r)^n$ hvor n er antall år.

Sum aritmetisk rekke:
$S(n) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = n(a_1 + \frac{(n-1)d}{2})$, hvor $d = a_{n+1} - a_n$.

Ledd nummer n aritmetisk rekke: $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Sum geometrisk rekke:
$S(n) = a_1 \frac{1-k^n}{1-k}$, hvor $k = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

En geometrisk rekke med uendelig mange ledd er konvergent for $-1 < k < 1$, og summen er: $S = a_1 \frac{1}{1-k}$

Nåverdi av A om t tidsperioder: $\frac{A}{(1+r)^t}$

Kontinuerlig forrenting: $A_t = A_0 e^{rt}$

Nåverdi betalingstrøm (n utbetalinger, første utbetaling er om en tidsperiode): $S = A\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$

Nåverdi betalingstrøm (n utbetalinger, første utbetaling umiddelbart):
$S = A(1+r)\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$

Nåverdi betalingstrøm (evig, første utbetaling er om en tidsperiode): $S = \frac{A}{r}$

Nåverdi betalingstrøm (evig, første utbetaling umiddelbart): $S = \frac{A(1+r)}{r}$

Formel for terminbeløp ved annuitetslån: $A = K\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$

Funksjonsanalyse for funksjoner i to variabler

Kandidater for (lokale) topp og bunn: $f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$

Test: $\Delta > 0, A > 0$ bunn, $\Delta > 0, A < 0$ topp, $\Delta < 0$ sadel.

($\Delta = AC - B^2$, hvor $A = f''_{xx}(x,y), B = f''_{xy}(x,y), C = f''_{yy}(x,y)$)

Totalderivert-formel: $z = f(x(t), y(t))$ gir $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$

Derivert til nivåkurve $f(x,y) =$ konstant: $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}$

Lagrange funksjon: $L(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)$

Likningssystem for kandidater til maks/min $f(x,y)$ gitt $g(x,y) = c$.

I. $f'_x(x,y) - \lambda g'_x(x,y) = 0$

II. $f'_y(x,y) - \lambda g'_y(x,y) = 0$

III. $g(x,y) = c$

Integrasjon

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + K$ (dersom $n \neq -1$)

$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = ln|x| + K$ (dersom $n = -1$)

$\int e^x dx = e^x + K$

Delvis integrasjon: $\int u' \cdot v dx = (u \cdot v) - \int u \cdot v' dx$

Eksempel (Substitusjon): $\int e^{2x} dx$, $u = 2x$ gir $\int e^u \frac{1}{2} du = \frac{1}{2}e^u + K = \frac{1}{2}e^{2x} + K$. ($\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du$)

Eksempel (Delbrøk): $\int \frac{2}{x^2-1} dx$, skriv $\frac{2}{x^2-1}$ som $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ og finn A og B.

Bestemt integral:
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, hvor $F'(x) = f(x)$.

Økonomibegreper og formler

Profittfunksjon: $\pi(x) = I(x) - K(x)$ (ofte: $I(x) = px$)

Grenseprofitt: $\pi'(x)$
Grenseinntekt: $I'(x)$
Grensekostnad: $K'(x)$

Enhetskostnad: $A(x) = \frac{K(x)}{x}$.

Differensiallikninger

$y' + p(x)y = q(x)$

Integrerende faktor: $e^{\int p(x)dx}$

Formel for løsning: $y(x) = \frac{1}{e^{\int p(x)dx}} \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx$

Taylorpolynom: $f(x) = p_n(x) + R_{n+1}(x)$ hvor $p_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

For en geometrisk rekke: $a_{n+1} = ka_n$