Høgskolen i Østfold

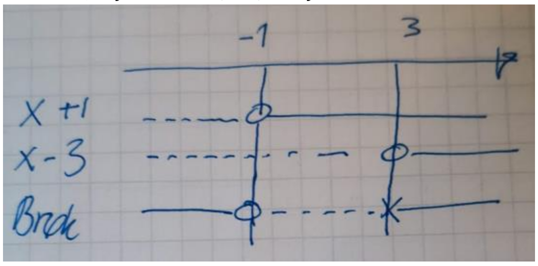
SENSORVEILEDNING

Emnekode:	SFB10711
Emnenavn:	Metodekurs I: Grunnleggende matematikk og statistikk. Deleksamen 1: Individuell, skriftlig fire timers eksamen i matematikk. Utsatt eksamen.
Eksamensform:	Individuell, skriftlig fire timers eksamen
Dato:	27.02.2019
Faglærer(e):	Bjørnar Karlsen Kivedal
Eventuelt:	

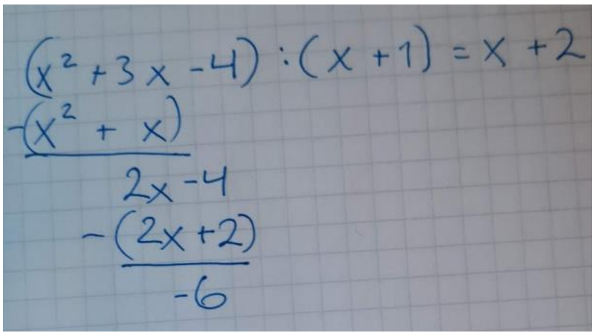
Oppgave 1

a) Bruker abc-formelen: $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-8\pm\sqrt{64-4\cdot3\cdot(-3)}}{6} = \frac{-8\pm\sqrt{64+36}}{6} = \frac{-8\pm10}{6}$ Dette gir $x = \frac{1}{3}$ og $x = -3$

b) Fra den andre ligningen får vi $y = 3 + x$. Setter dette inn i den første ligningen: $2x + 2(3 + x) = 2 \Rightarrow 2x + 6 + 2x = 2 \Rightarrow 4x = -4 \Rightarrow x = -1$ som gir $y = 3 + (-1) \Rightarrow y = 2$

c) Her må vi sette opp et fortegnsskjema: 

Dette viser at løsningen er $x < -1$ og $x > 3$

d) Skråasymptote finner vi ved polynomdivisjon: 

Dette viser at ligningen for skråasymptoten er x+2

Oppgave 2

a) $f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-4)-x\cdot2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$

b) $f'(x) = 2x \cdot \ln 2x + x^2 \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 = 2x \cdot \ln 2x + x$

c) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2(3x - 1) \cdot 3 = 3(3x - 1) = 9x - 3$

d) $f'(x) = 2e^{2x} - \frac{2}{x^3}$

Oppgave 3

a) $A = K\frac{r}{1-(1+r)^{-n}} = 100\,000\frac{0{,}06}{1-1{,}06^{-10}} = 13\,586{,}80$ kroner

b) $30\,000 \cdot 1{,}03^{10} = 40\,317{,}49$ kroner

c) $30\,000 \cdot 1{,}03^x = 60\,000 \Rightarrow 1{,}03^x = 2 \Rightarrow \ln 1{,}03^x = \ln 2 \Rightarrow x \cdot \ln 1{,}03 = \ln 2 \Rightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}03} = 23{,}45$. Det vil ta 24 år.

d) $60\,000 = A \cdot (1 + 0{,}03)^{10} \Rightarrow A = \frac{60\,000}{1{,}03^{10}} = 44\,645{,}63$ kroner

Oppgave 4

a) $A(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{20000}{x} + 12 + 0{,}001x$. Enhetskostnaden er minst der $A'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{20\,000}{x^2} + 0{,}001 = 0 \Rightarrow \frac{20\,000}{x^2} = 0{,}001 \Rightarrow x^2 = 20\,000\,000 \Rightarrow x = 4472{,}14$. Enhetskostnaden er da $A(4\,472{,}14) = \frac{20000}{4472{,}14} + 12 + 0{,}001 \cdot 4\,472{,}14 = 20{,}94$

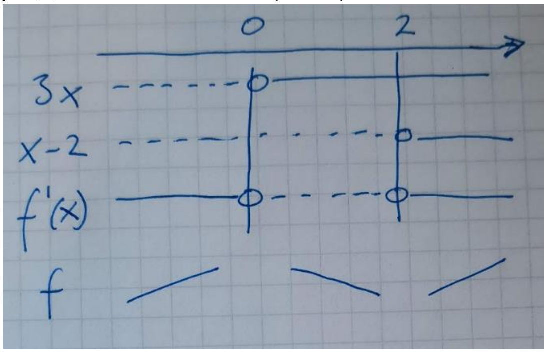
b) Grensekostnad: $K'(x) = 12 + 0{,}002x$. $K'(4\,472{,}14) = 12 + 0{,}002 \cdot 4\,472{,}14 = 20{,}94$

c) $\pi(x) = I(x) - K(x) = 30x - 0{,}002x^2 - (20\,000 + 12x + 0{,}001x^2) = -0{,}003x^2 + 18x - 20\,000$. Profitten er størst mulig der $\pi'(x) = 0 \Rightarrow -0{,}006x + 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{18}{0{,}006} = 3\,000$. Her er profitten $\pi(3\,000) = -0{,}003 \cdot 3\,000^2 + 18 \cdot 3\,000 - 20\,000 = 7\,000$

Oppgave 5

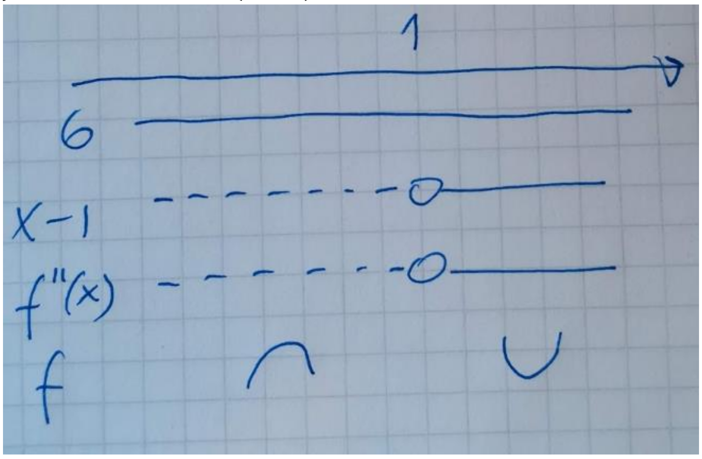
a) $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-3) = 0$ Dette gir løsningene $x = 0$ og $x = 3$

b) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. Setter dette inn i et fortegnsskjema, og får:



Vi ser altså at funksjonen vokser for x<0 og x>2 mens den avtar for 0<x<2. Vi har dermed et maksimumspunkt i x=0 og et minimumspunkt der x=2.

c) $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$. Setter dette inn i et fortegnsskjema og får:



Vi ser at funksjonen er konveks for x>1 og konkav for x<1.

d) Vendepunktet har vi der $f''(x) = 0$ som vi ser fra c) at er der x=1. Bruker dette i tangentformelen $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ der $a = 1$, $f(a) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$ og $f'(a) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$ som gir $y + 2 = -3(x-1) \Rightarrow y = -3x + 3 - 2 \Rightarrow y = 1 - 3x$

Oppgave 6

a) Maksimal inntekt finner vi der $f_x'(x,y) = f_y'(x,y) = 0$. Vi har $f_x'(x,y) = -4x - 2y + 300$ og $f_y'(x,y) = -6y - 2x + 400$. Setter begge disse lik 0 og får 2 ligninger med 2 ukjente: $-4x - 2y + 300 = 0 \Rightarrow 2y = 300 - 4x \Rightarrow 6y = 900 - 12x$ Setter dette inn i $f_y'(x,y) = 0 \Rightarrow -(900 - 12x) - 2x + 400 = 0 \Rightarrow 12x - 2x - 900 + 400 = 0 \Rightarrow 10x - 500 = 0 \Rightarrow 10x = 500 \Rightarrow x = 50$ Setter dette inn i løsningen for 2y: $2y = 300 - 4 \cdot 50 = 100 \Rightarrow y = 50$. Dette er et maksimumspunkt dersom $AC - B^2 > 0$ og $A < 0$ der $A = f_{xx}''(x,y)$, $B = f_{xy}''(x,y)$ og $C = f_{yy}''(x,y)$. Finner at $f_{xx}''(x,y) = -4$, $f_{xy}''(x,y) = -2$ og $f_{yy}''(x,y) = -6$ noe som gir $A < 0$ og $AC - B^2 = (-4)(-6) - (-2)^2 = 24 - 4 > 0$ og vi vet at dette er et maksimumspunkt. Total inntekt blir $f(50{,}50) = -2 \cdot 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 50 - 3 \cdot 50^2 + 300 \cdot 50 + 400 \cdot 50 = 17500$

b) Bruker Lagrange: $L(x,y) = -2x^2 - 2xy - 3y^2 + 300x + 400y - \lambda(x + y - 70)$. Maksimerer:
$L_x'(x,y) = -4x - 2y + 300 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -4x - 2y + 300$
$L_y'(x,y) = -6y - 2x + 400 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -6y - 2x + 400$
$\lambda = \lambda \Rightarrow -4x - 2y + 300 = -6y - 2x + 400 \Rightarrow -2y + 6y = -2x + 4x + 400 - 300 \Rightarrow 4y = 2x + 100 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 25$. Setter dette inn i bibetingelsen: $x + \frac{1}{2}x + 25 = 70 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 45 \Rightarrow x = 30$ og $y = 70 - x = 70 - 30 = 40$