Høgskolen i Østfold

EKSAMEN

Emnekode:	Emnenavn:
SFB107111	Metode 1, statistikk deleksamen
Dato:	**Eksamenstid:**
7. november 2017	4 timer fra kl. 14:00 til kl. 18:00
Hjelpemidler:	**Faglærer:**
Godkjent kalkulator og vedlagt formelsamling m/tabeller	Hans Kristian Bekkevard

Om eksamensoppgaven og poengberegning:

Oppgavesettet består av 11 sider inklusiv denne forsiden, hvorav de 7 siste sidene er formelsamling og tabeller. Kontroller at oppgaven er komplett før du begynner.

Oppgavesettet består av 7 oppgaver. Alle oppgavene skal besvares og hvert delspørsmål teller likt ved sensureringen.

Dersom du mener at noe i oppgaven er uklart, ta selv de forutsetninger du mener er nødvendige.

Lykke til.

Sensurfrist: 29. november 2017

Karakterene er tilgjengelige for studenter på Studentweb www.hiof.no/studentweb

Oppgave 1

Anta at 70% av alle studenter stemte ved siste stortingsvalg. Anta at du har spurt 4 tilfeldig valgte studenter om de stemte ved siste stortingsvalg.

La X = antall som stemte ved siste stortingsvalg. Anta at X er binomisk fordelt.

a) Finn $E(X)$ og $VAR(X)$

b) Hva er sannsynligheten for at 2 av de spurte stemte ved siste stortingsvalg

c) Hva er sannsynligheten for at minst 3 av de spurte stemte ved siste stortingsvalg

Oppgave 2

Ta utgangspunkt i følgende simultanfordeling.

	P(Y=0)	**P(Y=1)**	**P(Y=2)**
P(X=0)	10%	10%	20%
P(X=1)	30%	20%	10%

a) Finn de marginale sannsynlighetsfordelingene P(X=x) og P(Y=y) og regn ut E(X) og E(Y)

b) Regn ut Var(X) og Var(Y)

c) Regn ut Cov(X,Y) og $\rho(X, Y)$

Oppgave 3

En skoleklasse består av 13 jenter og 15 gutter. Seks av jentene og ti av guttene skal ta matteeksamen. La J bety at eleven er jente og M bety at eleven skal ta matteeksamen.

a) La oss velge ut en tilfeldig elev. Vi får vite at eleven er jente. Hva er sannsynligheten for at hun skal ta eksamen?

Vi velger ut to tilfeldige elever blant de 28.

b) Hva er sannsynligheten for at ingen av dem skal ta eksamen?

c) Hva er sannsynligheten for at de har forskjellig kjønn og begge skal ta eksamen?

Oppgave 4

En skog inneholder 50 rådyr, hvorav 12 er merket. En jeger feller til sammen 7 rådyr i løpet av jakta. La Y være antall merkede rådyr som jegeren feller.

a) Finn $P(Y = 2)$ og $P(Y \geq 2)$.

b) Finn $E[Y]$ og $Var[Y]$.

Oppgave 5

Anta at antall kilometer reisevei en student har til høgskolen er normalfordelt med parametere $\mu = 20$ og $\sigma = 3$

a) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt student har mer enn 25 kilometer reisevei?

b) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt student har mellom 17 og 22 kilometer reisevei?

c) Hva er sannsynligheten for at 10 tilfeldig valgte studenter i gjennomsnitt har mindre enn 18 kilometer reisevei?

Oppgave 6

Anta at du har spurt 40 studenter om de stemte ved siste stortingsvalg. 30 av de spurte sier de stemte.

a) Beregn et 95% konfidensintervall for andelen studenter som stemte ved siste stortingsvalg.

b) Du har undersøkt timelønnen ved deltidsjobbing for dine medstudenter og undersøkelsen ga følgende resultater:

$\overline{X} = 138{,}00$
$S_X = 18{,}9047$
$n = 10$

Beregn et 95% konfidensintervall for gjennomsnittlig timelønn for dine medstudenter.

c) Gjennomfør en hypotesetest på 5% signifikansnivå for å undersøke om studentenes timelønn er under 150 kr/time.

Oppgave 7

Se for deg et avlsforsøk hvor vi krysser kaniner med brune øyne med kaniner med røde øyne. Vi lar X være det antallet av avkommet som får røde øyne. Da kan vi si at $X \sim \text{bin}(n, p)$. Forsøket ble gjennomført på Kalnes jordbruksskole hvor de fikk 80 kaninunger; 16 hadde røde øyne og 64 hadde brune.

a) Lag et 95 % konfidensintervall for p ut fra dette forsøket.

b) Anta at arvelæren forutsier at minst 25 % av avkommet i forsøket beskrevet ovenfor bør få røde øyne. Bruk dataene fra Kalnes, sett opp hypoteser og gjennomfør en hypotesetest på hvorvidt andelen rødøyde kaniner er lavere enn de 25 % arvelæren forutsier. Bruk 5 % signifikansnivå.

c) Beregn p-verdien til testen du gjorde i b).

Formelsamling i statistikk 1

Kapittel 3

Grunnleggende formler i sannsynlighetsregningen

Komplementregel	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
Generell addisjonssetning	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Betinget sannsynlighet	$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Multiplikasjonsregel	$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A \vert B) = P(A) \cdot P(B \vert A)$
Bayes lov	$P(B \mid A) = \dfrac{P(B) \cdot P(A \mid B)}{P(A)}$
Total sannsynlighet	$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \vert B_i) \cdot P(B_i)$
Uavhengighet	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $\quad P(A \mid B) = P(A)$ $P(B \mid A) = P(B)$

Kombinatorikk

La *n* være antall mulige utfall i én trekning, og *k* antall trekninger.

Ordnet utvalg med tilbakelegging	$m = n^k$
Ordnet utvalg uten tilbakelegging	$P_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
Uordnet utvalg uten tilbakelegging	$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

Kapittel 4

Generelt om sannsynlighetsfordelinger

Fordelingsfunksjon	$F(x) = P(X \leq x)$ $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ $P(X > a) = 1 - F(a)$ $P(X \leq b) = F(b)$
Forventning	$\mu = E(X) = \sum_{alle\ x_i} x_i \cdot P(X = x_i)$ $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ $E(a) = a$ $E(bX) = bE(X)$ $E(a + bX) = a + bE(X)$ $E(a + bX + cX^2) = a + bE(X) + cE(X^2)$ $E[g(X)] = \sum_{alle\ x_i} g(x_i) \cdot P(X = x_i)$
Varians	$\sigma^2 = Var(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - \mu^2$ $Var(X + a) = Var(X)$ $Var(bX) = b^2 Var(X)$ $Var(bX + a) = b^2 Var(X)$
Standardavvik	$\sigma = SD(X) = \sqrt{Var(X)}$
Kovarians	$Cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E(X \cdot Y) - \mu_X \cdot \mu_Y$
Korrelasjon	$\rho(X, Y) = Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$

Kapittel 5

Spesielle diskrete sannsynlighetsfordelinger

Binomisk fordeling	$X \sim bin(n,p)$ $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ $E(X) = np \qquad Var(X) = np(1-p)$
Hypergeometrisk fordeling	$X \sim hypergeom(N, M, n)$ $P(X = x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ $E(X) = np \qquad Var(X) = np(1-p) \cdot \frac{N-n}{N-1} \qquad der\ p = \frac{M}{N}$
Poiossonfordeling	$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}$ $E(X) = \lambda t \qquad Var(X) = \lambda t$

Spesielle kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger

Eksponensialfordeling	$T \sim eksp(\lambda)$ $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \qquad F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad for\ t > 0$ $\mu = E(T) = \frac{1}{\lambda} \qquad Var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$
Standard normalfordeling	$Z \sim N(0,1)$ $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \qquad P(Z \leq z) = G(z)$
Generell normalfordeling	$X \sim N(\mu, \sigma)$ $F(x) = G\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Tilnærminger

Sentralgrenseteoremet	La $X_1, X_2, \dots, X_n$ være uavhengige variabler fra samme sannsynlighetsfordeling med forventning μ og standardavvik σ. Da er $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ tilnærmet $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ og summen $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ tilnærmet $N(n\mu, \sqrt{n}\sigma)$

Kapittel 6

Punktestimering

Estimering av μ	$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ $E(\bar{X}) = \mu \qquad Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \qquad SE(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Estimering av σ^2	$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \qquad E(S^2) = \sigma^2$
Estimering av p	$\hat{p} = \frac{X}{n} \qquad SE(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

Konfidensintervall

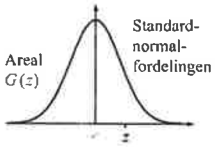
Z-intervall (kjent σ) $100(1-\alpha)$ % for μ	$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
Lengde av Z-intervall	$L = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
T-intervall (ukjent σ) $100(1-\alpha)$ % for μ	$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$
Konfidensintervall $100(1-\alpha)$ % for p	$\left[\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$

Hypotesetesting

Z-test av μ (når σ er kjent)	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
T-test av μ (når σ er ukjent)	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$
Z-test av p	$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$

E.3 Kumulativ standardnormalfordeling

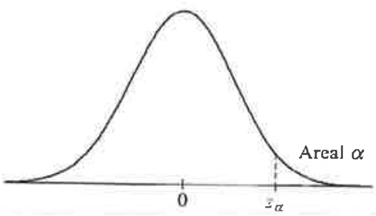
Tabellen viser Gauss-funksjonen $G(z)$ for forskjellige valg av z.



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,00	,0013	,0013	,0013	,0012	,0012	,0011	,0011	,0011	,0010	,0010
-2,90	,0019	,0018	,0018	,0017	,0016	,0016	,0015	,0015	,0014	,0014
-2,80	,0026	,0025	,0024	,0023	,0023	,0022	,0021	,0021	,0020	,0019
-2,70	,0035	,0034	,0033	,0032	,0031	,0030	,0029	,0028	,0027	,0026
-2,60	,0047	,0045	,0044	,0043	,0041	,0040	,0039	,0038	,0037	,0036
-2,50	,0062	,0060	,0059	,0057	,0055	,0054	,0052	,0051	,0049	,0048
-2,40	,0082	,0080	,0078	,0075	,0073	,0071	,0069	,0068	,0066	,0064
-2,30	,0107	,0104	,0102	,0099	,0096	,0094	,0091	,0089	,0087	,0084
-2,20	,0139	,0136	,0132	,0129	,0125	,0122	,0119	,0116	,0113	,0110
-2,10	,0179	,0174	,0170	,0166	,0162	,0158	,0154	,0150	,0146	,0143
-2,00	,0228	,0222	,0217	,0212	,0207	,0202	,0197	,0192	,0188	,0183
-1,90	,0287	,0281	,0274	,0268	,0262	,0256	,0250	,0244	,0239	,0233
-1,80	,0359	,0351	,0344	,0336	,0329	,0322	,0314	,0307	,0301	,0294
-1,70	,0446	,0436	,0427	,0418	,0409	,0401	,0392	,0384	,0375	,0367
-1,60	,0548	,0537	,0526	,0516	,0505	,0495	,0485	,0475	,0465	,0455
-1,50	,0668	,0655	,0643	,0630	,0618	,0606	,0594	,0582	,0571	,0559
-1,40	,0808	,0793	,0778	,0764	,0749	,0735	,0721	,0708	,0694	,0681
-1,30	,0968	,0951	,0934	,0918	,0901	,0885	,0869	,0853	,0838	,0823
-1,20	,1151	,1131	,1112	,1093	,1075	,1056	,1038	,1020	,1003	,0985
-1,10	,1357	,1335	,1314	,1292	,1271	,1251	,1230	,1210	,1190	,1170
-1,00	,1587	,1562	,1539	,1515	,1492	,1469	,1446	,1423	,1401	,1379
-0,90	,1841	,1814	,1788	,1762	,1736	,1711	,1685	,1660	,1635	,1611
-0,80	,2119	,2090	,2061	,2033	,2005	,1977	,1949	,1922	,1894	,1867
-0,70	,2420	,2389	,2358	,2327	,2296	,2266	,2236	,2206	,2177	,2148
-0,60	,2743	,2709	,2676	,2643	,2611	,2578	,2546	,2514	,2483	,2451
-0,50	,3085	,3050	,3015	,2981	,2946	,2912	,2877	,2843	,2810	,2776
-0,40	,3446	,3409	,3372	,3336	,3300	,3264	,3228	,3192	,3156	,3121
-0,30	,3821	,3783	,3745	,3707	,3669	,3632	,3594	,3557	,3520	,3483
-0,20	,4207	,4168	,4129	,4090	,4052	,4013	,3974	,3936	,3897	,3859
-0,10	,4602	,4562	,4522	,4483	,4443	,4404	,4364	,4325	,4286	,4247
-0,00	,5000	,4960	,4920	,4880	,4840	,4801	,4761	,4721	,4681	,4641
0,00	,5000	,5040	,5080	,5120	,5160	,5199	,5239	,5279	,5319	,5359
0,10	,5398	,5438	,5478	,5517	,5557	,5596	,5636	,5675	,5714	,5753
0,20	,5793	,5832	,5871	,5910	,5948	,5987	,6026	,6064	,6103	,6141
0,30	,6179	,6217	,6255	,6293	,6331	,6368	,6406	,6443	,6480	,6517
0,40	,6554	,6591	,6628	,6664	,6700	,6736	,6772	,6808	,6844	,6879
0,50	,6915	,6950	,6985	,7019	,7054	,7088	,7123	,7157	,7190	,7224
0,60	,7257	,7291	,7324	,7357	,7389	,7422	,7454	,7486	,7517	,7549
0,70	,7580	,7611	,7642	,7673	,7704	,7734	,7764	,7794	,7823	,7852
0,80	,7881	,7910	,7939	,7967	,7995	,8023	,8051	,8078	,8106	,8133
0,90	,8159	,8186	,8212	,8238	,8264	,8289	,8315	,8340	,8365	,8389
1,00	,8413	,8438	,8461	,8485	,8508	,8531	,8554	,8577	,8599	,8621
1,10	,8643	,8665	,8686	,8708	,8729	,8749	,8770	,8790	,8810	,8830
1,20	,8849	,8869	,8888	,8907	,8925	,8944	,8962	,8980	,8997	,9015
1,30	,9032	,9049	,9066	,9082	,9099	,9115	,9131	,9147	,9162	,9177
1,40	,9192	,9207	,9222	,9236	,9251	,9265	,9279	,9292	,9306	,9319
1,50	,9332	,9345	,9357	,9370	,9382	,9394	,9406	,9418	,9429	,9441
1,60	,9452	,9463	,9474	,9484	,9495	,9505	,9515	,9525	,9535	,9545
1,70	,9554	,9564	,9573	,9582	,9591	,9599	,9608	,9616	,9625	,9633
1,80	,9641	,9649	,9656	,9664	,9671	,9678	,9686	,9693	,9699	,9706
1,90	,9713	,9719	,9726	,9732	,9738	,9744	,9750	,9756	,9761	,9767
2,00	,9772	,9778	,9783	,9788	,9793	,9798	,9803	,9808	,9812	,9817
2,10	,9821	,9826	,9830	,9834	,9838	,9842	,9846	,9850	,9854	,9857
2,20	,9861	,9864	,9868	,9871	,9875	,9878	,9881	,9884	,9887	,9890
2,30	,9893	,9896	,9898	,9901	,9904	,9906	,9909	,9911	,9913	,9916
2,40	,9918	,9920	,9922	,9925	,9927	,9929	,9931	,9932	,9934	,9936
2,50	,9938	,9940	,9941	,9943	,9945	,9946	,9948	,9949	,9951	,9952
2,60	,9953	,9955	,9956	,9957	,9959	,9960	,9961	,9962	,9963	,9964
2,70	,9965	,9966	,9967	,9968	,9969	,9970	,9971	,9972	,9973	,9974
2,80	,9974	,9975	,9976	,9977	,9977	,9978	,9979	,9979	,9980	,9981
2,90	,9981	,9982	,9982	,9983	,9984	,9984	,9985	,9985	,9986	,9986
3,00	,9987	,9987	,9987	,9988	,9988	,9989	,9989	,9989	,9990	,9990

Verdien til G(z) er beregnet med Excel-funksjonen NORMALFORDELING(z;0;1;1)

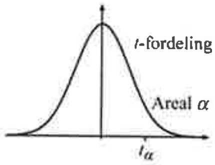
E.4 Standardnormalfordelingens kvantiltabell



α	z_α
0.100	1.282
0.050	1.645
0.025	1.960
0.010	2.326
0.005	2.576
0.001	3.090

E.5 *t*-fordelingens kvantiltabell

Tabellen viser den kritiske verdien t_α for forskjellige valg av nivået α.



Antall frihetsgrader	Areal *alfa* 0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
31	0,682	1,309	1,696	2,040	2,453	2,744
32	0,682	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738
33	0,682	1,308	1,692	2,035	2,445	2,733
34	0,682	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728
35	0,682	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
45	0,680	1,301	1,679	2,014	2,412	2,690
50	0,679	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
70	0,678	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648
80	0,678	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639
100	0,677	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626
1000	0,675	1,282	1,646	1,962	2,330	2,581
10000	0,675	1,282	1,645	1,960	2,327	2,576

Verdien t_{alfa} er beregnet av Excel-funksjonen TINV(2*alfa; frihetsgrad).