Høgskolen i Østfold

EKSAMEN

Emnekode: SFB10711	**Emnenavn:** Metode 1: Grunnleggende matematikk
Dato: 28. november 2016	**Eksamenstid:** 4 timer
Hjelpemidler: Godkjent kalkulator og utdelt formelsamling	**Faglærer:** Hans Kristian Bekkevard
Om eksamensoppgaven og poengberegning: Oppgavesettet består av 9 sider inklusiv denne forsiden. De siste 5 sidene er formelsamlingen. Kontroller at oppgaven er komplett før du begynner å besvare spørsmålene. 20 deloppgaver skal besvares og alle teller likt ved sensurering. Lykke til!	
Sensurfrist: 20.12.2016 Karakterene er tilgjengelige for studenter på Studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. www.hiof.no/studentweb	

Oppgave 1

En funksjon f(x) er gitt ved $f(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

a) Regn ut funksjonsverdiene til x = 2 og x = -2 og benytt det du finner til å forklare hvilken av følgende polynomdivisjoner som går opp:

$$f(x): (x-2)$$

$$f(x): (x+2)$$

b) Gjennomfør polynomdivisjonen $f(x): (x+2)$.

c) Finn nullpunktene til f(x) og faktoriser f(x).

Oppgave 2

En funksjon f(x) er gitt ved $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6$. Den er definert for alle verdier av x.

a) Avgjør for hvilke verdier av x funksjonen er voksende og avtakende, og bestem x-verdiene til maksimum og minimumspunktene til f(x).

b) Avgjør for hvilke verdier av x funksjonen er konveks og konkav, finn vendepunktet og regn ut uttrykket til tangenten i vendepunktet.

Oppgave 3

Finn den førstederiverte til følgende funksjonsuttrykk:

a) $f(x) = \frac{x^2-7x+12}{x-2}$

b) $g(x) = \ln(x^4 + x^2)$

c) $h(x) = e^{2x^2+\ln(3x)}$

Oppgave 4

Gitt en rekke definert ved $a_1 = 3{,}5$ og $\mathrm{d} = 1{,}5$.

a) Finn ved regning det 25. leddet i rekka, og hva er summen av de 25 første leddene?

En annen rekke er definert ved $a_1 = 20\ og\ k = 0{,}2$

b) Finn ved regning det femte leddet, a_5, og hva er summen av de 8 første leddene, S_8?

Oppgave 5

For en produksjonsbedrift får du oppgitt følgende funksjonen som viser sum totale kostnader K(x) ved et produksjonsnivå på x enheter:

$K(x) = 0{,}2x^2 + 20x + 2880$ og hvor $x \in [0, 300]$

Prisen de oppnår i markedet ved salg av mengde x er gitt ved prisfunksjonen p(x):

$p(x) = 80 - 0{,}1x$

a) Sett opp et uttrykk for inntektsfunksjonen, I(x). Finn deretter det produksjonsnivået som gir maksimalt overskudd (vinningsoptimum/vinningsoptimal mengde.) Hvor stor er den maksimale profitten?

b) Finn kostnadsoptimum (kostnadsoptimal mengde) og minste enhetskostnad.

c) En vares etterspørsel ved pris p er gitt ved $x(p) = 240 - p^2$. Bestem et uttrykk for priselastisiteten. Beregn elastisiteten for p = 10 og bruk svaret til å avgjøre hvordan etterspørselen endres hvis prisen settes opp med 2 % fra dette nivået (p = 10).

Oppgave 6

En bachelorstudent tok opp et studielån på totalt 300 000 kr i løpet av studietiden. Lånet fra Statens Lånekasse er et annuitetslån med 20 års nedbetalingstid og en nominell rente på 3 % p.a. Lånet betales tilbake med halvårlige terminer.

a) Hvor stort er terminbeløpet som skal betales hvert halvår?

b) Hvor mye betales totalt til Lånekassen dersom nedbetalingen følger fastsatt plan, og hvor mye er betalt i renter i så fall?

c) Etter det 10. året (20 terminer) så ønsker den tidligere studenten å betale ned studielånet i sin helhet. Hvor mye må hun ut med for å innfri/tilbakebetale lånet på dette tidspunktet (etter 10 år)?

d) Etter å ha innfridd lånet har studenten fremdeles oppsparte penger igjen. Disse plasserer hun i aksjemarkedet som hun forventer vil gi henne 8 % årlig avkastning. Hvor lang tid tar det før en krone investert er doblet hvis man legger forventet avkastning til grunn?

Oppgave 7

En funksjon er gitt ved $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}y^3 + x^2 - y^2 + 2$ og er definert for alle x og y.

a) Finn de partiell deriverte av 1. og 2. orden.

b) Finn og klassifiser stasjonære punkter.

Oppgave 8

Gitt funksjonen $f(x, y) = -3x^2 + 3xy - y^2 + 6x + y$

Bruk Lagranges metode til å bestemme funksjonens maksimumspunkt gitt bibetingelsen $x + y = 11$.

Formelsamling i metode 1 (matematikk)

Kapittel 1

Kvadratsetningene	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Potensregning	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $(a^n)^m = a^{nm}$

Kapittel 3

Abc formelen	$ax^2 + bx + c = 0 \; gir \; løsninger \; (røtter)$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Faktorisering	Har $ax^2 + bx + c$ røttene $r_1 og\ r_2$ så er $ax^2 + bx + c \; = a(x - r_1)(x - r_2)$

Kapittel 4

Bankformelen	Setter du et beløp A inn i banken med rente r per år, så er beløpet vokst til $A(1+r)^n$ etter n år. Og helt tilsvarende, setter du inn et beløp A inn i banken med perioderente r per periode, så er beløpet vokst til $A(1+r)^n$ etter n perioder.

Aritmetisk rekke	Summen av n ledd i en aritmetisk rekke er gitt ved $S(n) = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$, eller ved $S(n) = n\left(a_1 + \frac{(n-1)d}{2}\right)$ Ledd nr. n: $a_n = a_1 + (n-1)d$
Geometrisk rekke	Summen av n ledd i en geometrisk rekke er gitt ved $S(n) = a_1 \cdot \frac{1-k^n}{1-k}$ Ledd nr. n: $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$

Kapittel 5

Nåverdi	Nåverdien til et beløp A utbetalt om t tidsperioder er $\frac{A}{(1+r)^t}$ hvor r er perioderenten.
Kontinuerlig rente	$A_t = A_0 e^{rt}$
Nåverdi av en annuitet, første betaling om en periode	$S = A\dfrac{1-(1+r)^{-n}}{r}$
Terminbeløpet ved et annuitetslån	$A = \dfrac{K \cdot r}{1-(1+r)^{-n}}$

Kapittel 6

Definisjon av den deriverte	$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	
Deriverte av potensfunksjon	$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Derivert av konstant ganger funksjon	$g(x) = k \cdot f(x)$	$g'(x) = k \cdot f'(x)$
Derivert av sum/differanse	$h(x) = g(x) \pm f(x)$	$h'(x) = g'(x) \pm f'(x)$

Produktregelen	$(uv)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
Brøkregelen/kvotientregelen	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
Kjerneregelen	$f(x) = u^n$ $f'(x) = nu^{n-1} \cdot u'$ $f(x) = e^u$ $f'(x) = e^u \cdot u'$ $f(x) = \ln(u)$ $f'(x) = \frac{1}{u} \cdot u'$
Tangentformel	$y - y_1 = a \cdot (x - x_1)$ eller $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$
Elastisitet	$El_x f(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$

Kapittel 7

Krumming/Konveksitet	$f''(x) \geq 0$ konveks $f''(x) \leq 0$ konkav
Vendepunkt	$f''(x) bytter\ fortegn$
Andrederiverttesten	La f(x) være en dobbeltderiverbar funksjon, og la a være et tall sånn at $f'(a) = 0$. Da er: I: a et lokalt maksimumspunkt/toppunkt hvis $f''(a) < 0$ II: a et lokalt minimumspunkt/bunnpunkt hvis $f''(a) > 0$

Kapittel 8

Stasjonære punkt	Et punkt x_0, y_0 kalles et stasjonært punkt dersom $f'_x(x_0, y_0) = 0$ og $f'_y(x_0, y_0) = 0$
Klassifisering av stasjonære punkter	$A = f''_{xx}(x, y)$ $B = f''_{xy}(x, y)$ $C = f''_{yy}(x, y)$ Vi betrakter $AC - B^2$ for et stasjonært punkt. Det stasjonære punktet er et: I: Lokalt maksiumspunkt hvis $AC - B^2 > 0\ og\ A < 0$ II: Lokalt minimumspunkt hvis $AC - B^2 > 0\ og\ A > 0$ III: Sadelpunkt hvis $AC - B^2 < 0$
Lagranges metode	$L(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$