Høgskolen i Østfold

EKSAMEN

Emnekode: SFB10711	**Emne:** Metode 1 (Deleksamen i matematikk)
Dato: 23.11.15	**Eksamenstid:** 4 timer, kl. 9.00-13.00
Hjelpemidler: Kalkulator Utlevert formelsamling (4 siste sider i oppgavesettet)	**Faglærer:** Hans Kristian Bekkevard

Oppgavesettet består av totalt 8 sider inkludert denne forsiden. Formelsamlingen utgjør de 4 siste sidene. Kontroller at oppgavesettet er komplett.

Det er 20 delspørsmål. Hvert delspørsmål teller likt ved sensurering og alle oppgaver skal besvares.

Viktig: Husk å vise utregninger og mellomregninger.

Hvis du mener noe er uklart i oppgaveteksten – forklar og ta selv de nødvendige forutsetninger.

Lykke til!

Sensurdato: 15.12.15

Karakterene er tilgjengelige for studenter på studentweb senest dagen etter oppgitt sensurfrist. Følg instruksjoner gitt på: http://www.hiof.no/index.php?ID=7027

Oppgave 1

a) Løs likningen $x^2 - 9 = 0$

b) Løs likningssystemet (finn x og y):

I: $x + 2y = -2$
II: $-3x + y = -8$

c) Løs likningen $-2x^2 + 6x + 8 = 0$

d) Løs ulikheten $\frac{-2x^2+6x+8}{x} > 0$

Oppgave 2

a) Finn $f'(x)$ når $f(x) = \frac{x^7+2x^6}{x-1}$

b) Finn $f'(x)$ når $f(x) = ln(x^3 + x^2)\,(x^2 + x)$

Oppgave 3

Gitt funksjonen $f(x) = \frac{5}{3}x^3 - 5x^2 + 5$

a) Finn x -verdiene til funksjonens maks- og minpunkt (topp- og bunnpunkt.)

b) Finn koordinatene til funksjonens vendepunkt, og avgjør når funksjonen er strengt konveks og når den er strengt konkav.

c) Finn likningen til linja som tangerer f(x) i vendepunktet (vendetangenten)

Oppgave 4

Gitt funksjonen $g(x, y) = 3x^2y^{-2} + 2xy$

a) Finn de partielle deriverte av 1. og 2. orden til g(x,y).

En annen funksjon f(x,y) har disse partielle deriverte av 1. og 2. orden:

$f'_x(x, y) = y^2 - 2y$
$f'_y(x, y) = 2xy - 2x$
$f''_{xx}(x, y) = 0$
$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 2y - 2$
$f''_{yy}(x, y) = 2x$

b) Finn de stasjonære punktene til $f(x, y)$.

c) Klassifiser de stasjonære punktene.

Oppgave 5

Angi svarene i denne oppgaven med 2 desimaler

En bedrift har følgende inntektsfunksjon og kostnadsfunksjon for innkjøp og salg av en bestemt vare som kjøpes og selges i x liter

$I(x) = 0{,}01x^2 + 150x$

$K(x) = 0{,}16x^2 + 50x + 300$

a) Finn uttrykkene for grenseinntekt og grensekostnad. Hva er grenseinntekten og grensekostnaden hvis det kjøpes og selges 150 liter?

b) Finn vinningsoptimum/profittmaksimum. Hva blir maksimal profitt?

c) Finn kostnadsoptimum og laveste enhetskostnad.

Oppgave 6

Angi svarene i denne oppgaven med 2 desimaler

a) Hvor lang tid tar det før et engangsinnskudd på 25 000 er blitt til 30 000 ved en årlig rente på 1,5 %?

b) Anta at du skal låne 100 000 som skal nedbetales som et annuitetslån med kvartalsvise terminer over en periode på 10 år og med en årlig rente på 2 %.

Hva blir det kvartalsvise terminbeløpet?

c) Hva er restgjelden etter 9 år, dvs. når ett år gjenstår?

d) Hvor mye er innestående på fondskontoen din på 18årsdagen hvis foreldrene dine har satt inn 1 000 kroner på kontoen hver eneste bursdag fra og med ettårsdagen og til og med 18årsdagen din, og du legger til grunn en årlig avkastning på 8 %? (Hint: Geometrisk rekke).

Oppgave 7

Angi svarene i denne oppgaven med 2 desimaler

En virksomhet har følgende profittfunksjon for innkjøp og salg av to ulike varetyper x og y som kjøpes og selges i tonn i løpet av et gitt tidsrom:

$\pi(x, y) = -4x^2 + 200x - 3y^2 + 75y - 4xy + 10\ 000$

Anta at virksomheten maksimalt kan kjøpe inn og selge 80 tonn til sammen av x og y i løpet av dette tidsrommet, slik at virksomheten er begrenset av følgende betingelse:

$$x + y = 80$$

Bruk Lagranges metode for å finne hvilken kombinasjon av x og y som maksimerer profittfunksjonen under den gitte betingelsen.

Hva blir den samlede profitten da?

Formelsamling i metode 1 (matematikkdel)

Kapittel 1

Kvadratsetningene	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Potensregning	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $a^n / a^m = a^{n-m}$ $(a^n)^m = a^{nm}$

Kapittel 3

abc formelen	$ax^2 + bx + c = 0$ gir røtter/løsninger $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Andregradspolynomer og faktorisering	Har $ax^2 + bx + c$ røttene r_1 og r_2 er $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$

Kapittel 4

Bankformel	Setter du inn et beløp A med rente r per år har beløpet vokst til $A(1+r)^n$ etter n år
Aritmetiske rekke	Sum $S(n) = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ eller $S(n) = n\left(a_1 + \frac{(n-1)d}{2}\right)$
Geometrisk rekke	Sum $S(n) = a_1 \frac{1-k^n}{1-k}$

Kapittel 5

Kontinuerlig forrentning	$A_t = A_0 e^{rt}$
Nåverdi av en betalingsstrøm med n like betalinger av størrelse A og hvor første betaling er om en tidsperiode	$S = A\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$
Terminbeløp ved annuitetslån	$A = K\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$

Kapittel 6

Definisjon av den deriverte	$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	
Derivasjon av en potensfunksjon	$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Deriverte av en konstant ganger en funksjon	$g(x) = k \cdot f(x)$	$g'(x) = k \cdot f'(x)$
Derivert av en sum/differanse	$h(x) = g(x) \pm f(x)$	$h'(x) = g'(x) \pm f'(x)$
Produktregel	$(uv)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	
Kvotientregel	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	
Kjerneregel	$f(x) = u^n$ $f(x) = e^u$ $f(x) = \ln(u)$	$f'(x) = nu^{n-1} \cdot u'$ $f'(x) = e^u \cdot u'$ $f'(x) = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
Tangentformel	$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$	
Elastisitet	$El_x f(x) = \dfrac{x}{f(x)} f'(x)$	

Kapittel 7

Krumming	$f''(x) \geq 0 \quad konveks$ $f''(x) \leq 0 \quad konkav$
Vendepunkt	$f''(x) bytter\ fortegn$
Andrederiverttesten	La $f(x)$ være en dobbeltderiverbar funksjon, og la a være ett tall slik at $f'(a) = 0$. Da er 1) a et lokalt maksimumspunkt hvis $f''(a) < 0$ 2) a et lokalt minimumspunkt hvis $f''(a) > 0$

Kapittel 8

Topp, bunn og sadel	**Kortere navn** $A = f''_{xx}(x, y)$ $B = f''_{xy}(x, y)$ $C = f''_{yy}(x, y)$ Vi betrakter $AC - B^2$ **Resultatet** La f(x, y) være en to ganger deriverbar funksjon med kontinuerlige andreordens deriverte. Det kritiske punktet (x_0, y_0) er: i) Et lokalt maksimum hvis $AC - B^2 > 0$ og $A < 0$ ii) Et lokalt minimum hvis $AC - B^2 > 0$ og $A > 0$ iii) Et sadelpunkt hvis $AC - B^2 < 0$
Lagranges metode	$L(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$