Høgskolen i Østfold

EKSAMEN

<table>
<tr><td colspan="1">Emnekode:
SFB10711</td><td colspan="2">Emne:
Metodekurs I: Grunnleggende matematikk og statistikk
(deleksamen 1 i Matematikk)</td></tr>
<tr><td>Dato:
25.11.14</td><td colspan="2">Eksamenstid:
kl. 09.00 til kl. 13.00. 4 timer.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hjelpemidler:

Kalkulator
Utlevert formelsamling (4 siste sider i oppgavesettet)</td><td>Faglærer:

Hans Kristian Bekkevard</td></tr>
<tr><td colspan="3">Oppgavesettet består av totalt 8 sider inkludert denne forsiden. Formelsamlingen utgjør de 4 siste sidene. Kontrollér at oppgavesettet er komplett.

Oppgavesettet består av 20 delspørsmål. Hvert delspørsmål teller likt ved sensurering, alle oppgaver skal besvares.

Husk å vise utregninger og mellomregninger.

Hvis noe er uklart i oppgaveteksten – forklar og ta selv de nødvendige forutsetninger.

LYKKE TIL.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Sensurdato: <u>17.12.14</u>

Karakterene er tilgjengelige for studenter på Studentweb senest dagen etter oppgitt sensurfrist. Følg instruksjoner gitt på: http://www.hiof.no/istudentweb</td></tr>
</table>

Oppgave 1

Gitt funksjonen $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

a) Foreta polynomdivisjonen $f(x)$: $(x + 3)$

b) Finn nullpunktene til f(x).

Oppgave 2

Finn 1. deriverte av funksjonene:

a) $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

b) $h(x) = (1 + x)e^{2x}$

c) $f(x) = \ln(x^3 - 2x^2 + 3)$

Oppgave 3

En bedrifts kostnader K(x) ved produksjon av x enheter er gitt ved:

$$K(x) = 0{,}1x^2 + 50x + 4000$$

Varene som produseres selges i markedet for en pris på 100 kr pr stk uavhengig av mengde (horisontal priskurve). Alt som produseres selges.

a) Sett opp uttrykket for profittfunksjonen $\Pi(x)$, og finn deretter vinningsoptimal/profittmaksimerende mengde.

b) Sett opp uttrykket for enhetskostnaden E(x), og finn deretter kostnadsoptimum/kostnadsoptimal mengde.

c) Hvor stor er *profitten* ved den produksjonsmengden som gir lavest *enhetskostnad*?

Oppgave 4

Anta at du skal låne 200 000 kr som skal nedbetales som et annuitetslån med *månedlige* terminer over en periode på 10 år og med en årlig nominell rente på 4,2 %. Rund av svarene til to desimaler.

a) Hva blir det månedlige terminbeløpet?

b) Hvor mye betales totalt i renter i løpet av lånets løpetid?

c) Anta at du etter 5 år (60 innbetalinger) ønsker å tilbakebetale resten av lånet i sin helhet. Hva er restgjelden/skyldig beløp etter 5 år?

Oppgave 5

Gitt funksjonen: $f(x) = x^3 - 3x$ $D_f = \mathbb{R}$

a) Finn x verdiene til funksjonens topp og bunnpunkter.

b) Finn for hvilke x verdier funksjonen er (strengt) konveks og (strengt) konkav.

c) Finn likningen til vendetangenten i funksjonens vendepunkt.

Oppgave 6

En mann uten økonomibakgrunn lager sin egen pensjonsordning ved å legge til side penger i skrivebordsskuffen sin hvert år. Han begynner på sin 40 årsdag med å legge 6 000 kr i skuffen. Deretter legger på hver bursdag et nytt beløp i skuffen som er 10 % større enn beløpet året før, så på 41 årsdagen legger han 6 600 kr i skuffen, osv.

(Oppgavene nedenfor skal løses med formler så man enkelt kan endre antall år, beløp, osv. og *ikke* ved å lage tabeller. Bruk to desimaler)

a) Hvor stort er beløpet han legger i skrivebordsskuffen på 50 årsdagen sin?

b) På 67 årsdagen legger han siste beløp i skuffen. Deretter tømmer han den og teller opp alle pengene han har spart der igjennom årene. Hvor mye er det? (Summen av beløpene *fra og med* 40 årsdagen *til og med* 67årsdagen. Hint: Geometrisk rekke.)

c) Et beløp du har hatt investert i et aksjefond har vokst fra 12 000 kr til 15 780 kr på 5 år. Hva slags årlig avkastning har du hatt på dette beløpet?

Oppgave 7

Gitt funksjonen $f(x, y) = 2x^2y - xy - 2x$

a) Finn de partiell deriverte av 1. og 2. orden.

b) Finn og klassifiser eventuelle stasjonære punkter.

Oppgave 8

En bedrift er aktiv i to bransjer. Ved å investere i de to bransjene med henholdsvis x og y millioner kroner, anslår den at den vil få en samlet omsetning O(x,y) som kan beskrives av uttrykket:

$$O(x, y) = 2x^{0,6}y^{0,4}$$

Bedriften har 120 millioner tilgjengelig til investeringer, den har med andre ord denne budsjettbegrensningen:

$$x + y = 120$$

Hvordan bør den tilpasse seg med x og y for å maksimere omsetningen O, og hvor stor blir omsetningen da?

Formelsamling i metode 1 (matematikkdel)

Kapittel 1

Kvadratsetningene	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Potensregning	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $a^n / a^m = a^{n-m}$ $(a^n)^m = a^{nm}$

Kapittel 3

abc formelen	$ax^2 + bx + c = 0$ gir røtter/løsninger $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Andregradspolynomer og faktorisering	Har $ax^2 + bx + c$ røttene r_1 og r_2 er $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$

Kapittel 4

Bankformel	Setter du inn et beløp A med rente r per år har beløpet vokst til $A(1+r)^n$ etter n år
Aritmetiske rekke	Sum $S(n) = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ eller $S(n) = n\left(a_1 + \frac{(n-1)d}{2}\right)$
Geometrisk rekke	Sum $S(n) = a_1 \frac{1-k^n}{1-k}$

Kapittel 5

Kontinuerlig forrentning	$A_t = A_0 e^{rt}$
Nåverdi av en betalingsstrøm med n like betalinger av størrelse A og hvor første betaling er om en tidsperiode	$S = A\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$
Terminbeløp ved annuitetslån	$A = K\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$

Kapittel 6

Definisjon av den deriverte	$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	
Derivasjon av en potensfunksjon	$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Deriverte av en konstant ganger en funksjon	$g(x) = k \cdot f(x)$	$g'(x) = k \cdot f'(x)$
Derivert av en sum/differanse	$h(x) = g(x) \pm f(x)$	$h'(x) = g'(x) \pm f'(x)$
Produktregel	$(uv)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	
Kvotientregel	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	
Kjerneregel	$f(x) = u^n$ $f(x) = e^u$ $f(x) = \ln(u)$	$f'(x) = nu^{n-1} \cdot u'$ $f'(x) = e^u \cdot u'$ $f'(x) = \frac{1}{u} \cdot u'$
Tangentformel	$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$	
Elastisitet	$El_x f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x)$	

Kapittel 7

Krumming	$f''(x) \geq 0 \quad konveks$ $f''(x) \leq 0 \quad konkav$
Vendepunkt	$f''(x) bytter\ fortegn$
Andrederiverttesten	La $f(x)$ være en dobbeltderiverbar funksjon, og la a være ett tall slik at $f'(a) = 0$. Da er 1) a et lokalt maksimumspunkt hvis $f''(a) < 0$ 2) a et lokalt minimumspunkt hvis $f''(a) > 0$

Kapittel 8

Topp, bunn og sadel	**Kortere navn** $A = f''_{xx}(x, y)$ $B = f''_{xy}(x, y)$ $C = f''_{yy}(x, y)$ Vi betrakter AC – B^2 **Resultatet** La f(x, y) være en to ganger deriverbar funksjon med kontinuerlige andreordens deriverte. Det kritiske punktet (x_0, y_0) er: i) Et lokalt maksimum hvis AC – B^2 > 0 og A < 0 ii) Et lokalt minimum hvis AC – B^2 > 0 og A > 0 iii) Et sadelpunkt hvis AC – B^2 < 0
Lagranges metode	$L(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$