Høgskolen i Østfold

EKSAMEN

Emnekode: SFB10711	Emne: Metodekurs 1: Grunnleggende matematikk og statistikk **Deleksamen i statistikk**
Dato: 3. januar 2014	Eksamenstid: kl. 0900 til kl. 1300

Hjelpemidler: Kalkulator Utlevert formelsamling	Faglærer: Nils Ingar Arvidsen

Eksamensoppgaven:
Oppgavesettet består av 4 sider inklusiv denne forsiden. Kontroller at oppgaven er komplett før du begynner å besvare spørsmålene. Formelsamling i tillegg.

Oppgavesettet består av 5 oppgaver. Alle delspørsmålene i de fem oppgavene skal besvares.

Hvert delspørsmål teller likt ved sensurering.

Begynn hver oppgave på ny side.

OBS ALLE BEREGNINGER SKAL VISES

Om noe er uklart eller mangelfullt i oppgaven inngår det som en del av oppgaven å ta de nødvendige forutsetninger.

LYKKE TIL

Sensurdato: 24. januar 2014
Karakterene er tilgjengelige for studenter på studentweb senest dagen etter oppgitt sensurfrist. Følg instruksjoner gitt på:
http://www.hiof.no/index.php?ID=7027

Oppgave 1

Et varelager inneholder 48 kasser. 6 av kassene inneholder varer med feil. Vi tar med oss to tilfeldige kasser fra lageret.

a) På hvor mange måter kan det gjøres?

b) Hva er sannsynligheten for at ingen av de to kassene inneholder varer med feil?

c) Hva er sannsynligheten for at minst en av de to kassene inneholder varer med feil?

Oppgave 2 (begynn på ny side)

Ved teoriprøven til førerkort er det mange elever som trenger flere forsøk for å bestå. Ved en trafikkskole har man funnet at antall forsøk elevene trenger er som vist i tabellen under. Variabelen X representerer antall forsøk en tilfeldig elev trenger for å bestå teoriprøven.

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,45	0,25	0,20	0,05	0,05

a) Tegn grafen til den kumulative fordelingsfunksjonen $F(x) = P(X \leq x)$

b) Beregn forventningen $E(X)$ og variansen $Var(X)$.

c) Hva er sannsynligheten for at en elev bruker minst tre forsøk for å bestå teoriprøven?

d) Avgiften til Statens vegvesen er kr 520 hver gang man går opp til prøven. La variabelen Y representere totalt beløp en elev må betale i avgifter til teoriprøven. Beregn $E(Y)$.

Oppgave 3 (begynn på ny side)

Trafikkskolen regner med at den totale kostnaden K for å ta førerprøven for en tilfeldig elev er tilnærmet normalfordelt med forventning $\mu = 29000$ kr og standardavvik $\sigma = 6000$ kr.

a) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig elev bruker mer enn kr 32000 på å ta førerprøven?

b) 25 elever trekkes tilfeldig. Hva er sannsynligheten for at de i gjennomsnitt bruker mindre enn kr 30000 på førerprøven?

c) Etter omlegging av driften ved trafikkskolen påstår de at det har blitt billigere å ta førerkort hos dem. Vi ønsker å teste dette ved å spørre 16 tilfeldig elever hva deres kostnader var. Vi fant at gjennomsnittet i utvalget var kr 27000 mens standardavviket i utvalget var kr 5200. Formuler dette som en hypotesetest om forventningen μ.

d) Gjennomfør testen med signifikansnivå 5 %. Hva er testens forkastingsområde?

Oppgave 4 (begynn på ny side)

I en spørreundersøkelse utført i desember 2013 ble 1000 velgere spurt om hvilket parti de ville stemme på hvis det var valg i morgen. Av disse svarte 340 personer at de ville stemme på Arbeiderpartiet. Ved valget i 2013 fikk Arbeiderpartiet 30,8 % av stemmene.
Man lurer på om oppslutningen om Arbeiderpartiet har økt.

a) Sett opp passende hypoteser

b) Foreta en hypotesetest på 5 % nivå for å avgjøre om Arbeiderpartiets velgerandel har økt siden valget i 2013.

c) Lag et 95 % konfidensintervall for Arbeiderpartiets velgerandel basert på undersøkelsen.

Oppgave 5 (begynn på ny side)

Anta at HiØ studenter har en vekt som er normalfordelt N(70, 4).

a) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig student veier mellom 62 og 74 kg?

b) Man gjør et tilfeldig utvalg av 4 studenter. Hva er sannsynligheten for at akkurat en veier under 60 kg?

Man betrakter S_4 = Summen av vekten til 4 studenter.
c) Hvilken fordeling har S_4 og hva er sannsynligheten for at S_4 er større enn 280 kg?

Anta nå at både μ og σ er ukjent. Man lurer på om studentenes vekt har gått opp. Man veier 5 tilfeldige studenter.
Resultatet ble 67, 71, 71, 73 og 83 kg.

d) Formuler problemet som et hypoteseproblem og gjennomfør en test med $\alpha = 0{,}05$ og avgjør om vekten har gått opp

e) Hva menes med en tests styrke?

f) Lag et 95 % konfidensintervall for μ.

Formelsamling i statistikk (Metode 1)

Kapittel 3

Grunnleggende formler i sannsynlighetsregningen

Komplement regel	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
Generell addisjonssetning	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Betinget sannsynlighet	$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Multiplikasjonsregel	$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A\|B) = P(A) \cdot P(B\|A)$
Bayes lov	$P(B \mid A) = \dfrac{P(B) \cdot P(A \mid B)}{P(A)}$
Total sannsynlighet	$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)$
Uavhengighet	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad P(A \mid B) = P(A)$ $P(B \mid A) = P(B)$

Kombinatorikk

La *n* være antall mulige utfall i én trekning, og *k* antall trekninger.

Ordnet utvalg med tilbakelegging	$m = n^k$
Ordnet utvalg uten tilbakelegging	$P_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
Uordnet utvalg uten tilbakelegging	$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

Kapittel 4

Generelt om sannsynlighetsfordelinger

Fordelingsfunksjon	$F(x) = P(X \leq x)$ $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ $P(X > a) = 1 - F(a)$ $P(X \leq b) = F(b)$
Forventning	$\mu = E(X) = \sum_{alle\ x_i} x_i \cdot P(X = x_i)$ $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ $E(a) = a$ $E(bX) = bE(X)$ $E(a + bX) = a + bE(X)$ $E(a + bX + cX^2) = a + bE(X) + cE(X^2)$ $E[g(X)] = \sum_{alle\ x_i} g(x_i) \cdot P(X = x_i)$
Varians	$\sigma^2 = Var(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - \mu^2$ $Var(X + a) = Var(X)$ $Var(bX) = b^2Var(X)$ $Var(bX + a) = b^2Var(X)$
Standardavvik	$\sigma = SD(X) = \sqrt{Var(X)}$
Kovarians	$Cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E(X \cdot Y) - \mu_X \cdot \mu_Y$
Korrelasjon	$\rho(X, Y) = Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$

Kapittel 5

Spesielle diskrete sannsynlighetsfordelinger

Binomisk fordeling	$X \sim bin(n,p)$ $P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ $E(X) = np \qquad Var(X) = np(1-p)$
Hypergeometrisk fordeling	$X \sim hypergeom(N,M,n)$ $P(X=x) = \dfrac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ $E(X) = np \qquad Var(X) = np(1-p) \cdot \dfrac{N-n}{N-1} \qquad der\ p = \dfrac{M}{N}$
Poiossonfordeling	$P(X=x) = \dfrac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}$ $E(X) = \lambda t \qquad Var(X) = \lambda t$

Spesielle kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger

Eksponensialfordeling	$T \sim eksp(\lambda)$ $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \qquad F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad for\ t > 0$ $\mu = E(T) = \dfrac{1}{\lambda} \qquad Var(T) = \dfrac{1}{\lambda^2}$
Standard normalfordeling	$Z \sim N(0,1)$ $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \qquad P(Z \leq z) = G(z)$
Generell normalfordeling	$X \sim N(\mu,\sigma)$ $F(x) = G\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Tilnærminger

Sentralgrenseteoremet	La $X_1, X_2, \dots, X_n$ være uavhengige variabler fra samme sannsynlighetsfordeling med forventning μ og standardavvik σ. Da er $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ tilnærmet $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ og summen $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ tilnærmet $N(n\mu, \sqrt{n}\sigma)$

Kapittel 6
Punktestimering

Estimering av μ	$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ $E(\bar{X}) = \mu$ $\quad Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ $\quad SE(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Estimering av σ^2	$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ $\quad E(S^2) = \sigma^2$
Estimering av p	$\hat{p} = \frac{X}{n}$ $\quad SE(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

Konfidensintervall

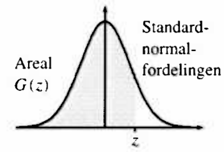
Z-intervall (kjent σ) $100(1-\alpha)$ % for μ	$\left[\bar{X}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
Lengde av Z-intervall	$L=2\cdot z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
T-intervall (ukjent σ) $100(1-\alpha)$ % for μ	$\left[\bar{X}-t_{\alpha/2}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{X}+t_{\alpha/2}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$
Konfidensintervall $100(1-\alpha)$ % for p	$\left[\hat{p}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\hat{p}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$

Hypotesetesting

Z-test av μ (når σ er kjent)	$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
T-test av μ (når σ er ukjent)	$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$
Z-test av p	$Z=\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$

D.3 Kumulativ standardnormalfordeling

Tabellen viser Gauss-funksjonen $G(z)$ for forskjellige valg av z.

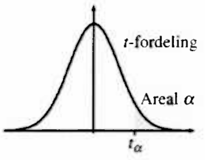


z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,00	,0013	,0013	,0013	,0012	,0012	,0011	,0011	,0011	,0010	,0010
-2,90	,0019	,0018	,0018	,0017	,0016	,0016	,0015	,0015	,0014	,0014
-2,80	,0026	,0025	,0024	,0023	,0023	,0022	,0021	,0021	,0020	,0019
-2,70	,0035	,0034	,0033	,0032	,0031	,0030	,0029	,0028	,0027	,0026
-2,60	,0047	,0045	,0044	,0043	,0041	,0040	,0039	,0038	,0037	,0036
-2,50	,0062	,0060	,0059	,0057	,0055	,0054	,0052	,0051	,0049	,0048
-2,40	,0082	,0080	,0078	,0075	,0073	,0071	,0069	,0068	,0066	,0064
-2,30	,0107	,0104	,0102	,0099	,0096	,0094	,0091	,0089	,0087	,0084
-2,20	,0139	,0136	,0132	,0129	,0125	,0122	,0119	,0116	,0113	,0110
-2,10	,0179	,0174	,0170	,0166	,0162	,0158	,0154	,0150	,0146	,0143
-2,00	,0228	,0222	,0217	,0212	,0207	,0202	,0197	,0192	,0188	,0183
-1,90	,0287	,0281	,0274	,0268	,0262	,0256	,0250	,0244	,0239	,0233
-1,80	,0359	,0351	,0344	,0336	,0329	,0322	,0314	,0307	,0301	,0294
-1,70	,0446	,0436	,0427	,0418	,0409	,0401	,0392	,0384	,0375	,0367
-1,60	,0548	,0537	,0526	,0516	,0505	,0495	,0485	,0475	,0465	,0455
-1,50	,0668	,0655	,0643	,0630	,0618	,0606	,0594	,0582	,0571	,0559
-1,40	,0808	,0793	,0778	,0764	,0749	,0735	,0721	,0708	,0694	,0681
-1,30	,0968	,0951	,0934	,0918	,0901	,0885	,0869	,0853	,0838	,0823
-1,20	,1151	,1131	,1112	,1093	,1075	,1056	,1038	,1020	,1003	,0985
-1,10	,1357	,1335	,1314	,1292	,1271	,1251	,1230	,1210	,1190	,1170
-1,00	,1587	,1562	,1539	,1515	,1492	,1469	,1446	,1423	,1401	,1379
-0,90	,1841	,1814	,1788	,1762	,1736	,1711	,1685	,1660	,1635	,1611
-0,80	,2119	,2090	,2061	,2033	,2005	,1977	,1949	,1922	,1894	,1867
-0,70	,2420	,2389	,2358	,2327	,2296	,2266	,2236	,2206	,2177	,2148
-0,60	,2743	,2709	,2676	,2643	,2611	,2578	,2546	,2514	,2483	,2451
-0,50	,3085	,3050	,3015	,2981	,2946	,2912	,2877	,2843	,2810	,2776
-0,40	,3446	,3409	,3372	,3336	,3300	,3264	,3228	,3192	,3156	,3121
-0,30	,3821	,3783	,3745	,3707	,3669	,3632	,3594	,3557	,3520	,3483
-0,20	,4207	,4168	,4129	,4090	,4052	,4013	,3974	,3936	,3897	,3859
-0,10	,4602	,4562	,4522	,4483	,4443	,4404	,4364	,4325	,4286	,4247
-0,00	,5000	,4960	,4920	,4880	,4840	,4801	,4761	,4721	,4681	,4641
0,00	,5000	,5040	,5080	,5120	,5160	,5199	,5239	,5279	,5319	,5359
0,10	,5398	,5438	,5478	,5517	,5557	,5596	,5636	,5675	,5714	,5753
0,20	,5793	,5832	,5871	,5910	,5948	,5987	,6026	,6064	,6103	,6141
0,30	,6179	,6217	,6255	,6293	,6331	,6368	,6406	,6443	,6480	,6517
0,40	,6554	,6591	,6628	,6664	,6700	,6736	,6772	,6808	,6844	,6879
0,50	,6915	,6950	,6985	,7019	,7054	,7088	,7123	,7157	,7190	,7224
0,60	,7257	,7291	,7324	,7357	,7389	,7422	,7454	,7486	,7517	,7549
0,70	,7580	,7611	,7642	,7673	,7704	,7734	,7764	,7794	,7823	,7852
0,80	,7881	,7910	,7939	,7967	,7995	,8023	,8051	,8078	,8106	,8133
0,90	,8159	,8186	,8212	,8238	,8264	,8289	,8315	,8340	,8365	,8389
1,00	,8413	,8438	,8461	,8485	,8508	,8531	,8554	,8577	,8599	,8621
1,10	,8643	,8665	,8686	,8708	,8729	,8749	,8770	,8790	,8810	,8830
1,20	,8849	,8869	,8888	,8907	,8925	,8944	,8962	,8980	,8997	,9015
1,30	,9032	,9049	,9066	,9082	,9099	,9115	,9131	,9147	,9162	,9177
1,40	,9192	,9207	,9222	,9236	,9251	,9265	,9279	,9292	,9306	,9319
1,50	,9332	,9345	,9357	,9370	,9382	,9394	,9406	,9418	,9429	,9441
1,60	,9452	,9463	,9474	,9484	,9495	,9505	,9515	,9525	,9535	,9545
1,70	,9554	,9564	,9573	,9582	,9591	,9599	,9608	,9616	,9625	,9633
1,80	,9641	,9649	,9656	,9664	,9671	,9678	,9686	,9693	,9699	,9706
1,90	,9713	,9719	,9726	,9732	,9738	,9744	,9750	,9756	,9761	,9767
2,00	,9772	,9778	,9783	,9788	,9793	,9798	,9803	,9808	,9812	,9817
2,10	,9821	,9826	,9830	,9834	,9838	,9842	,9846	,9850	,9854	,9857
2,20	,9861	,9864	,9868	,9871	,9875	,9878	,9881	,9884	,9887	,9890
2,30	,9893	,9896	,9898	,9901	,9904	,9906	,9909	,9911	,9913	,9916
2,40	,9918	,9920	,9922	,9925	,9927	,9929	,9931	,9932	,9934	,9936
2,50	,9938	,9940	,9941	,9943	,9945	,9946	,9948	,9949	,9951	,9952
2,60	,9953	,9955	,9956	,9957	,9959	,9960	,9961	,9962	,9963	,9964
2,70	,9965	,9966	,9967	,9968	,9969	,9970	,9971	,9972	,9973	,9974
2,80	,9974	,9975	,9976	,9977	,9977	,9978	,9979	,9979	,9980	,9981
2,90	,9981	,9982	,9982	,9983	,9984	,9984	,9985	,9985	,9986	,9986
3,00	,9987	,9987	,9987	,9988	,9988	,9989	,9989	,9989	,9990	,9990

Verdien til G(z) er beregnet med Excel-funksjonen NORMALFORDELING(z;0;1;1).

D.5 *t*-fordelingens kvantiltabell

Tabellen viser den kritiske verdien t_α for forskjellige valg av nivået α.



Antall frihetsgrader	Areal *alfa* 0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
31	0,682	1,309	1,696	2,040	2,453	2,744
32	0,682	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738
33	0,682	1,308	1,692	2,035	2,445	2,733
34	0,682	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728
35	0,682	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
45	0,680	1,301	1,679	2,014	2,412	2,690
50	0,679	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
70	0,678	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648
80	0,678	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639
100	0,677	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626
1000	0,675	1,282	1,646	1,962	2,330	2,581
10000	0,675	1,282	1,645	1,960	2,327	2,576

Verdien t_{alfa} er beregnet av Excel-funksjonen TINV(2*alfa; frihetsgrad).