Høgskolen i Østfold

EKSAMEN

Emnekode: SFB10711	Emne: Metode 1 (Deleksamen i matematikk)
Dato: 02.12.2013	Eksamenstid: kl 0900 til kl 1300
Hjelpemidler: Kalkulator Utlevert formelsamling	Faglærer: Hans Kristian Bekkevard

Eksamensoppgaven:

Oppgavesettet består av 4 sider inklusiv denne forsiden. Kontroller at oppgaven er komplett før du begynner å besvare spørsmålene. Formelsamling på 4 sider kommer i tillegg.

Oppgavesettet består av 8 oppgaver og 20 delspørsmål. Hvert delspørsmål teller likt ved sensurering.

Begynn hver oppgave på ny side.

OBS! ALLE BEREGNINGER SKAL VISES

Om noe er uklart eller mangelfullt i oppgaven inngår det som en del av oppgaven å ta de nødvendige forutsetninger.

LYKKE TIL

Sensurdato: 02.01.2014

Karakterene er tilgjengelige for studenter på studentweb senest dagen etter oppgitt sensurfrist. Følg instruksjoner gitt på:
http://www.hiof.no/index.php?ID=7027

Oppgave 1

Gitt funksjonen $f(x) = \frac{5}{3}x^3 - 5x^2 + 5$ $\quad$ $for\ x\ \in \mathbb{R}$

a) Finn koordinatene til funksjonens maksimumspunkt og minimumspunkt.

b) Finn koordinatene til funksjonens vendepunkt, og når funksjonen er konveks og når den er konkav.

c) Finn formelen til tangenten til f(x) i vendepunktet.

Oppgave 2 (begynn på et nytt ark)

Gitt $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ $\quad$ $for\ x\ \in \mathbb{R}$

a) Foreta polynomdivisjonen $f(x)$: $(x - 1)$

b) Bestem nullpunktene til f(x) og når f(x) > 0 og når f(x) < 0.

Oppgave 3 (begynn på et nytt ark)

En bedrift har følgende kostnadsfunksjon K(x) for produksjon av en vare i x antall kilo.

$K(x) = 0{,}05x^2 + 25x + 30\ 625$

Prisen bedriften kan oppnå i markedet ved salg av x antall kilo er gitt ved

$p(x) = -0{,}04x + 250$

a) Finn et uttrykk for inntektsfunksjonen I(x) og profittfunksjonen, π(x)

b) Finn vinningsoptimum og hvor stor profitten er der.

c) Finn kostnadsoptimum og laveste enhetskostnad.

d) Gitt etterspørselsfunksjonen $x(p) = 100 - 2p$ definert for $0 < p < 50$,

Finn elastisitetsfunksjonen E_p og beregn til hvilken pris etterspørselen er nøytralelastisk.

Oppgave 4 (begynn på et nytt ark)

Gitt funksjonen

$$f(x, y) = x^2y - 8x - y$$

a) Bestem de partielle deriverte av 1. og 2. orden

b) Finn og klassifiser eventuelle stasjonære punkter.

Oppgave 5 (begynn på et nytt ark)

Finn de partiell deriverte av første orden til $f(x, y) = e^{x^2}\ln(y^2)$

Oppgave 6 (begynn på et nytt ark)

Anta at du gjør *ett* innskudd i banken på 50 000 kr. Betingelsene er årlig rente på 3.5 %.

a) Hvor mye har du innestående i banken etter 10 år?

b) Hvor lang tid tar det før sparebeløpet ditt har passert 100 000 kr? Oppgi svaret i hele år.

Oppgave 7 (begynn på et nytt ark)

Du låner 200 000 kr som skal nedbetales som et annuitetslån med årlige terminer etterskuddsvis over en periode på 10 år og med en årlig rente på 5%.
Rund av svarene dine til nærmeste hele krone.

a) Hva er månedlig terminbeløp?

b) Hvor mye er renter og hvor mye er avdrag i den siste innbetalingen?

c) Etter halve lånets løpetid, rett *etter* 5. innbetaling så ønsker du å tilbakebetale lånet i sin helhet. Anta at rentebetingelsene er uendret. Hvor mye må du betale for å innfri lånet på dette tidspunktet?

d) Dersom den årlige renten på 5 % skulle betales månedlig, hva hadde blitt effektiv rente dersom du ser bort fra eventuelle gebyrer o.l? Bruk 2 desimaler i svaret.

Oppgave 8 (begynn på et nytt ark)

En Økad student sitter værfast på en tropisk øy. Hun er både sulten og tørst etter å ha reist fra matpakken sin, men heldigvis er det en kiosk på øya. Hun trenger både brød (x) og vann (y). Prisen er 1 USD for et brød og 1 USD for en liter vann. I lomma har hun 10 USD.

Hun har gjennom studiet på høyskolen kommet fram til at hennes nyttefunksjon for konsum av brød og vann best kan beskrives som

$U(x, y) = x^{0,2}y^{0,8}$

a) Hvor mye brød (x) og liter vann (y) bør hun kjøpe for å maksimere nytten U(x,y), gitt $x + y = 10$

b) Hva blir den totale nytten hennes ved beste tilpasning?

Formelsamling i metode 1 (matematikkdel)

Kapittel 1

Kvadratsetningene	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Potensregning	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $a^n / a^m = a^{n-m}$ $(a^n)^m = a^{nm}$

Kapittel 3

abc formelen	$ax^2 + bx + c = 0$ gir røtter/løsninger $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Andregradspolynomer og faktorisering	Har $ax^2 + bx + c$ røttene r_1 og r_2 er $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$

Kapittel 4

Bankformel	Setter du inn et beløp A med rente r per år har beløpet vokst til $A(1+r)^n$ etter n år
Aritmetiske rekke	Sum $S(n) = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ eller $S(n) = n\left(a_1 + \frac{(n-1)d}{2}\right)$
Geometrisk rekke	Sum $S(n) = a_1 \frac{1-k^n}{1-k}$

Kapittel 5

Kontinuerlig forrentning	$A_t = A_0 e^{rt}$
Nåverdi av en betalingsstrøm med n like betalinger av størrelse A og hvor første betaling er om en tidsperiode	$S = A\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$
Terminbeløp ved annuitetslån	$A = K\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$

Kapittel 6

Definisjon av den deriverte	$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	
Derivasjon av en potensfunksjon	$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Deriverte av en konstant ganger en funksjon	$g(x) = k \cdot f(x)$	$g'(x) = k \cdot f'(x)$
Derivert av en sum/differanse	$h(x) = g(x) \pm f(x)$	$h'(x) = g'(x) \pm f'(x)$
Produktregel	$(uv)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	
Kvotientregel	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	
Kjerneregel	$f(x) = u^n$ $f(x) = e^u$ $f(x) = \ln(u)$	$f'(x) = nu^{n-1} \cdot u'$ $f'(x) = e^u \cdot u'$ $f'(x) = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
Tangentformel	$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$	
Elastisitet	$El_x f(x) = \dfrac{x}{f(x)} f'(x)$	

Kapittel 7

Krumming	$f''(x) \geq 0 \quad konveks$ $f''(x) \leq 0 \quad konkav$
Vendepunkt	$f''(x) bytter\ fortegn$
Andrederiverttesten	La $f(x)$ være en dobbeltderiverbar funksjon, og la a være ett tall slik at $f'(a) = 0$. Da er 1) a et lokalt maksimumspunkt hvis $f''(a) < 0$ 2) a et lokalt minimumspunkt hvis $f''(a) > 0$

Kapittel 8

Topp, bunn og sadel	**Kortere navn** $A = f''_{xx}(x, y)$ $B = f''_{xy}(x, y)$ $C = f''_{yy}(x, y)$ Vi betrakter $AC - B^2$ **Resultatet** La f(x, y) være en to ganger deriverbar funksjon med kontinuerlige andreordens deriverte. Det kritiske punktet (x_0, y_0) er: i) Et lokalt maksimum hvis $AC - B^2 > 0$ og $A < 0$ ii) Et lokalt minimum hvis $AC - B^2 > 0$ og $A > 0$ iii) Et sadelpunkt hvis $AC - B^2 < 0$
Lagranges metode	$L(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$