Høgskolen i Østfold

SENSORVEILEDNING

Emnekode:	LSKMA11120 V1
Emnenavn:	Tall, måling, statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet I (1-7)
Eksamensform:	Individuelt, skriftlig eksamen
Dato:	12. desember 2023 9:00-15:00
Faglærer(e):	Johan Bredberg (emnesansvarlig) Matthias Høye
Eventuelt: Sensorveiledningen består av 13 sider inklusive denne forsiden.	

Innhold

Denne sensorveiledningen inneholder:

1. **Vurderingskriterier for den enkelte karakter**
2. **Viktige elementer for vurderingen**
3. **Oppgavene med stikkordsmessig løsningsforslag**

1. Vurderingskriterier for den enkelte karakter

	Generelle kriterier Kilde: https://www.uio.no/studier/eksamen/karakterskala/fagspesifikk-karakterbeskrivelse/mn-math.html#skriftlig	**Prosent av besvarelsen som kan indikere karakter**
A	**Fremragende** prestasjon der kandidaten har løst problemer som krever fantasi og innsikt. Besvarelsen viser at kandidaten fullt ut behersker både de begrepsmessige, regnetekniske og anvendelsesmessige delene av emnet. Fremstillingen er klar og presis med korrekt bruk av notasjon og fagterminologi. Noen få mindre feil eller blanke punkter kan tillates.	[92% - 100 %]
B	**Meget god** prestasjon der kandidaten har løst problemer som går utover det rutinemessige, og som krever god oversikt over emnet. Besvarelsen viser meget god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset. Fremstillingen er klar og med stort sett riktig bruk av terminologi og notasjon.	[77% - 92 %)
C	**God** Gjennomsnittlig prestasjon der kandidaten har løst oppgaver av middels vanskelighetsgrad fra de fleste deler av kurset. Besvarelsen viser god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har ikke i særlig grad klart å anvende sine ferdigheter og kunnskaper på oppgaver som går ut over det rutinemessige. Fremstillingen er grei å forstå, men kan ha en del formelle mangler.	[58% - 77%)
D	**Nokså god** Prestasjon under gjennomsnittet der kandidaten har løst eller kommet et stykke på vei med oppgaver fra flere sentrale deler av kurset. Besvarelsen viser kjennskap til de viktigste teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har vanskelig for å komme helt i mål selv på rutinepregede oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men kan ha en god del formelle mangler.	[46 % - 58%)
E	**Tilstrekkelig** Prestasjon som tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Besvarelsen viser at kandidaten har kjennskap til begreper, teknikker og anvendelser fra flere deler av kurset, og at han/hun til en viss grad kan bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men røper klare feil og misforståelser.	[40 % - 46%)
F	**Ikke bestått** Prestasjon som ikke tilfredsstiller minimumskravene. Besvarelsen viser at kandidaten har manglende kjennskap til sentrale teknikker, begreper og anvendelser, eller manglende evne til å bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Besvarelser som bare viser beherskelse av en avgrenset del av emnet, vil normalt havne i denne kategorien.	[0 % - 40%)

Universitets – og høgskolerådet har utformet disse generelle, kvalitative beskrivelsen av de ulike karakterene:

symbol	betegnelse	generell, ikke fagspesifikk beskrivelse av vurderingskriterier
A	fremragende	Fremragende prestasjon som klart utmerker seg. Kandidaten viser svært god vurderingsevne og stor grad av selvstendighet.
B	meget god	Meget god prestasjon. Kandidaten viser meget god vurderingsevne og selvstendighet.
C	god	Jevnt god prestasjon som er tilfredsstillende på de fleste områder. Kandidaten viser god vurderingsevne og selvstendighet på de viktigste områdene.
D	nokså god	En akseptabel prestasjon med noen vesentlige mangler. Kandidaten viser en viss grad av vurderingsevne og selvstendighet.
E	tilstrekkelig	Prestasjonen tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Kandidaten viser liten vurderingsevne og selvstendighet.
F	ikke bestått	Prestasjon som ikke tilfredsstiller de faglige minimumskravene. Kandidaten viser både manglende vurderingsevne og selvstendighet.

2. Viktige elementer for vurderingen

Nedenfor finnes forslag på løsninger. Det vil selvsagt være flere andre fremgangsmåter som kan gi full uttelling så her må det vurderes i hvert enkelt tilfelle. I gjennomgangen nedenfor er det indikert en maksimumspoengsum for hver av deloppgavene, og i noen grad utdypet hvordan poeng skal settes utover dette. Det er imidlertid av stor betydning med en helhetlig vurdering.

3. Oppgavene med stikkordsmessig løsningsforslag

Oppgave 1 [4 + 3 + 4 = 11 %]

a) I LK20 kan man lese om å «utforske og beskrive generelle egenskaper ved partall og oddetall» i forbindelse med kompetansemål etter 2. trinn. Gi en kort beskrivelse av en lek som du skulle kunne gjennomføre på en matematikkleksjon sammen med elever på 2. trinn for å arbeide med dette kompetansemålet.

b) Eichler har skrevet om fem steg for å beskrive barns progresjon i forståelse av størrelser og måling. Hvilket er det fjerde steget? Og gi et eksempel på hvordan man skulle kunne arbeide med dette steget i forbindelse med areal.

c)
   i. Eleven Marco mener at det går å dele 19 på 4 og at svaret blir 4,75 mens eleven Pernille mener at 19 ikke er delelig med 4. Hvordan kan du som lærer kommentere elevenes synspunkter?
   ii. Eleven Marek sier at et kvadrat er et rektangel mens eleven Vanessa sier at en geometrisk figur er et kvadrat bare om det er et rektangel. Din kommentar?

Løsningsforslag:

a) Dette er en åpen oppgave så det finnes flere ulike løsninger. Ett eksempel på en slik lek kunne være at man ber elever tenke på tilfeldige positive heltall for å deretter hente så mange leksaksbiler og spørre hvorvidt disse kan pares ihop eller ikke, og hvorfor? Leken kan deretter fortsette litt etter hva elevene ønsker.

b) Det fjerde steget er måling med ikke-standardiserte enheter. Man kan måle at et bord kan dekkes ved hjelp av 8 likedanne bøker, eller av 72 likedanne papirbiter.

c) i. Det er sant at 19/4 = 4,75. Men man kan som lærer påpeke at når man snakker om delelighet innenfor matematikk så er det ofte underforstått at man snakker om heltall, så når man spør hvorvidt 19 er delelig med 4 så mener man hvorvidt svaret blir et heltall eller ikke.
ii. Marek og Vanessa sier egentlig akkurat samme sak, og det de sier er sant (kvadrater er rektangler akkurat som hester er dyr).

Oppgave 2 [5 + 6 + 4 = 15 %]

a) Barn kan telle på en meningsfull måte når de har tilegnet seg følgende fem prinsipper: prinsippet om parkobling, prinsippet om stabil ordning, kardinaltallprinsippet, abstraksjonsprinsippet og prinsippet om irrelevant ordning. Forklar kort hva som menes med hver av de fem prinsippene.
b) Presenter ulike representasjoner av 5, og forklar hvorfor det er viktig å benytte ulike representasjoner i prosessen med å lære barn om mengder og tall.
c) Vi har to modeller for tall; fortell kort om dem.

Løsningsforslag:

a) Prinsippet om parkobling: Eleven kan koble to mengder til hverandre – objektet som telles, kobles til det riktige tallordet.
   Prinsippet om stabil ordning: Eleven bruker konsekvent en riktig oppramsing av tallord: en, to, tre, fire, fem … uten å forveksle, hoppe over eller si tall i feil rekkefølge → 1,2,3,4,6,7,8
   Kardinaltallprinsippet: Eleven vet at det siste tallordet som sies, tilsvarer det totale antallet objekter som er telt.
   Abstraksjonsprinsippet: Eleven kan telle alle objekter, til og med objekter som ikke er fysisk til stede. For eksempel antallet bamser som er på senga hjemme.
   Prinsippet om irrelevant ordning: Rekkefølgen av de objektene som telles, spiller ingen rolle for den totale mengden.
b) Studenten kan vise til et mangfold av ulike representasjoner der konkreter (f.eks penger, fem fingre), halv-konkreter (gjenstander som representerer konkreter), halv-abstrakter (tegninger/illustrasjoner av gjenstander), abstrakter (f.eks tellestreker, tallinjer, mønster på terning) og symboler (tallsymbolet 5) trekkes frem.
   Studenten reflekterer rundt viktigheten av å benytte seg av flere ulike representasjoner i innlæringen av tall for at elevene skal få bred erfaring og forståelse for at tallsymboler kan representere ulike ting ut i fra konteksten de er plassert i. Å bevege seg fra å jobbe med konkreter til å regne med de abstrakte tallsymbolene er viktig for å legge til rette for at elevene forstår betydningen av symbolene. Studenten bør også trekke in tilpasset opplæring og nevne noe om at elever lærer på ulike måter, og at variasjon vil legge til rette for at man ivaretar et mangfold av elever.

c) To modeller for tall, lineær modell og gruppert modell. Konkretisering av lineær modell kan være tallinja og perletellekjede. I gruppert modell grupperer vi i for eksempel tiere, hundrere, tusenere, osv. Vanligvis får elevene en forståelse av den lineære modellen først. Eksempel på aktiviteter for lineær modell: plasserer tall på tallinja. Eksempel aktivitet gruppert modell: gruppere tellebrikker i enere og tiere.

Oppgave 3 [3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15 %]

a) Fem barn skal stå i en rekkefølge. Hvor mange muligheter finnes det, og hvorfor?

b) I en klasse med 23 elever skal det deles ut 4 identiske gavekort. En elev har kun mulighet til å vinne ett gavekort! Hvor mange kombinasjoner av mulige utdelinger av gavekort finnes det?

c) I en boks finnes 5 røde kuler. Om sannsynligheten for å trekke en rød kule er 2 %, hvor mange kuler finnes det i boksen som ikke er røde?

d) Hva er sjansen for å få resultatet 5 når du kaster én terning? Hva er sjansen for å få summen 5 når du kaster to terninger?

e) Sannsynligheten for mål når Peter skyter er alltid 90 %. Dersom Peter skyter to ganger, hva er sjansen for to mål? Hvor mange ganger må Peter skyte for at han mer ofte enn ikke skal misse noen av disse skuddene?

Løsningsforslag:

a) Hvem som skal stå først kan du velge på 5 måter, neste person kan du velge på 4 måter, neste på 3 måter, neste på 2 måter og siste personen kan du så velge på 1 måte. Dermed blir svaret 5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120.

b) Dette blir et uordnet utvalg uten tilbakelegging ettersom det ikke spiller noen rolle hvilket gavekort en elev vinner, og ettersom eleven kun kan vinne 1 gang!

$$\binom{23}{4} = \frac{23!}{(23-4)! \cdot 4!} = 8855 \; mulige\ kombinasjoner$$

c) Ettersom 2 prosent betyr 5 kuler, så må 100 prosent bety 250 kuler. Svaret blir derfor 245 ikke-røde kuler.

d)

$$P(5\ med\ \acute{e}n\ terning) = \frac{Gunstige}{Alle} = \frac{1}{6}$$

og

$$P(5\ med\ to\ terninger) = \frac{Gunstige}{Alle} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

e) Sjansen for to mål blir 0.9 * 0.9 = 0.81. Dersom Peter skyter N ganger, blir sjansen for bare mål 0.9^N. Ved hjelp av kalkulator finner vi rekkefølgen 0.9, 0.81, 0.729, 0.6561, 0.59049, 0.531441, 0.4782969 så vi skjønner at 7 skudd er riktig svar.

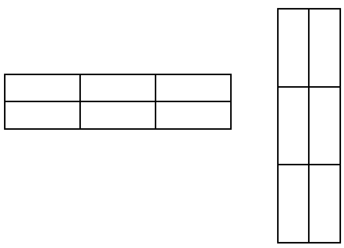
Oppgave 4 [4 + 3 + 3 + 3 + 4 + 3 = 20 %]

a) Hva innebærer den kommutative lov? Vis den kommutative lov knyttet til multiplikasjon ved hjelp av et bilde/figur.
b) Forklar ved å bruke eksempler hva målingsdivisjon og delingsdivisjon er for noe.
c) En elev har kommet frem til at 14 · 3 = 15. Forklar en mulig misoppfatning eleven har.
d) Primtallsfaktoriser tallet 360 og skriv svaret med potenser om mulig.
e) Finn største felles faktor (sff) og minste felles multiplum (mfm) til tallene 18 og 42.
f) Bruk delelighetsreglene for å avgjøre om tallet 147 kan deles på 2, 3, 5, 6 og/eller 9.

Løsningsforslag

a) Den kommutative lov sier at om man adderer eller multipliserer to tall, blir resultatet det samme uansett rekkefølge man adderer eller multipliserer.
Eksempel på illustrasjon for kommutativ lov knyttet til multiplikasjon:

3·2=6



2·3 = 6

b) Delingsdivisjon: 12 klinkekuler skal deles på 4 barn, hvor mange klinkekuler får hvert barn?
Målingsdivisjon: 12 meter tau skal kappes i hoppetau med lengde 2 meter, hvor mange hoppetau rekker det til?

c) Mest sannsynlig har eleven en misoppfatning knyttet posisjonssystemet og har derfor multiplisert 1 med 3, deretter 4 med 3, og så addert det sammen!

d) $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

e) $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$
$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$
$\text{sff}(18,42) = 2 \cdot 3 = 6$
$\text{mfm}(18,42) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 126$

f) 147 er ikke delelig på 2 ettersom siste siffer ikke er et partall. Det er delelig med 3 ettersom tverrsummen = 1+4+7 = 12, og 12 er delelig med 3. Det er ikke delelig på 5 ettersom siste siffer ikke er 5 eller 0. Kan ikke deles på 6 ettersom det ikke er delelig på både 2 OG 3. Er ikke delelig med 9 ettersom tverrsummen ikke er delelig med 9.

Oppgave 5 [6 + 1 + 4 + 3 + 4 = 18 %]

a) Ett spill skjer sånn her: Fem terninger blir kastet og *alle* de fem tallene skal brukes for å lage ett gitt tall ved hjelp av addisjon, subtraksjon, multiplikasjon, divisjon, parenteser og potenser. F.eks. om de fem tallene er 1 & 3 & 4 & 5 & 5 og det gitte tallet som skal dannes er 12, så er $5 \cdot 5 – 3 \cdot 4 – 1$ og $3 \cdot 4 \cdot 1^{5+5}$ og $(5 – 3) \cdot 4 + 5 – 1$ ulike muligheter. Derimot er jo for eksempel $13 – (5 – 4)^5$ ikke tillatt.
Tenk deg nå at de fem tallene er 2 & 3 & 3 & 4 & 5 og at det gitte tallet som skal dannes er 31. Din oppgave er å skrive ned seks stykker *genuint ulike* muligheter.

b) Skriv 3216 med romerske siffer.

c) Beregn 1010100_{to} delt med 10101_{to} på to ulike måter, der svaret skal gis i titallsystemet.

d) Skriv tallet seks hundre og nittito i basen seks.

e) Her skal du gi ditt svar i titallsystemet. Hvilket er det største tallet som i base åtte skrives med tre siffer? Finn svaret på to måter.

Løsningsforslag:

a) Her er noen muligheter:

$$2^5 - (\frac{3}{3})^4$$

$$3 + 4 * (5 * 2 - 3)$$

$$(3 + 3) * (2 + 4) - 5$$

$$2 * 3 * 5 + 4 - 3$$

$$5 * 4 + 3 * 3 + 2$$

$$3 * (3 + 4) + 2 * 5$$

$$2 * 4 * 5 - 3 * 3$$

$$2 * (5 * 4 - 3) - 3$$

$$(3 * 3 - 2) * 5 - 4$$

$$(5 * 3 - 4) * 3 - 2$$

Observer at for eksempel 5*4 + 3*3 + 2 telles som samme som 3*3 + 2 + 4*5.

b) MMMCCXVI.

c) Tallene er henholdsvis

$$4 + 16 + 64 = 84$$

og

$$1 + 4 + 16 = 21.$$

Så svaret blir 84/21 = 4. Alternativt regner vi først i totallsystemet: svaret blir 100_2 som i vårt titallsystem jo er 4.

d) Potensene av 6 er 1,6,36,216,… Vi får plass med tre 216, så er 44 igjen. Vi får plass med én 36, så har vi 8 igjen. Vi får plass med én 6, så har vi 2 igjen. Svar: 3112_{seks}.

e) Man kan tenke at $777_{\text{åtte}}$ er 7 + 7 * 8 + 7 * 64 = 7 * 73 = 511. Eller kan man tenke at det minste tallet med fire siffer er $1000_{\text{åtte}}$ som er 8^3 = 512 så derfor må det største tallet med tre siffer være 511.

Oppgave 6 [3 + 6 = 9 %]

Elevene i en klasse på 5. trinn skal i gang med arbeid knyttet til desimaltall.

Du vil gi dem følgende diagnostiske oppgave.

Ranger disse tre desimaltallene fra minst til størst: 0,63 og 0,7 og 0,584.

a) Hva vil det si at dette er en diagnostisk oppgave?

b) Beskriv en undervisningstime der det skal jobbes med denne oppgaven og der du som lærer støtter deg til de 5 prinsippene til Smith og Stein (Forvente, Observere, Velge, Bestemme, Se sammenhenger) i gjennomføringen. Beskriv kort utforming av timen og ta videre for deg hvert av de fem prinsippene og hva du tenker er hensikten med dine valg knyttet til hver av dem.

Løsningsforslag

a) At oppgaven er diagnostisk vil si at den er laget med hensikt å få innsyn i elevenes strategier/tanker og lokalisere misoppfatninger slik at disse kan være utgangspunkt for å utvikle elevenes eksisterende begreper eller oppklare mulige misoppfatninger.

b) Her vil det være noe variasjon i hvordan studentene ser for seg utforming av timen. Et mulig løsningsforslag kan være:
Jeg ville organisert elevene i grupper av 3 rundt vertikale tavler og bedt dem om å rangere tallene med tilhørende forklaring ved hjelp av ord, bilder eller lignende. Videre ville jeg på forhånd ha gjort meg opp noen tanker om hvilke løsningsstrategier og misoppfatninger jeg ser for meg at flere av elevene vil ha (**forvente**). Dette ville jeg gjort for å være godt forberedt på hva jeg skal se etter og hva jeg som lærer kan forvente kommer frem, slik at jeg har best mulig forutsetning for å samtale om dette med elevene. I gjennomføringen av timen ville jeg beveget meg rundt i klasserommet for å få oversikt over gruppenes tavler og elevenes resonnement (**observere**). Dette for å se etter mine forventninger, men også for å undersøke om noen elever har tenkt på måter som jeg ikke forutså. I denne prosessen ville jeg samtidig gjort meg noen tanker om hvilke grupper/elevers resonnement jeg vil trekke frem i helklassesamtalen (**velge**), og samtidig tenkt på hvilken rekkefølge jeg vil trekke frem de ulike resonnementene i (**bestemme**). Dette med tanke på at det skal være strategisk for å få flest mulig elever med på å jobbe mot det matematiske målet for timen. I helklassesamtalen vil jeg deretter ha fokus på at mitt valg av rekkefølge skal bidra til

at elevene skal **se sammenhenger** på tvers av resonnement, og lede mot målet for timen og oppklare misoppfatninger som har dukket opp.

Oppgave 7 [3 + 3 + 3 + 3 = 12 %]

Dette er høydene i meter til noen trær:

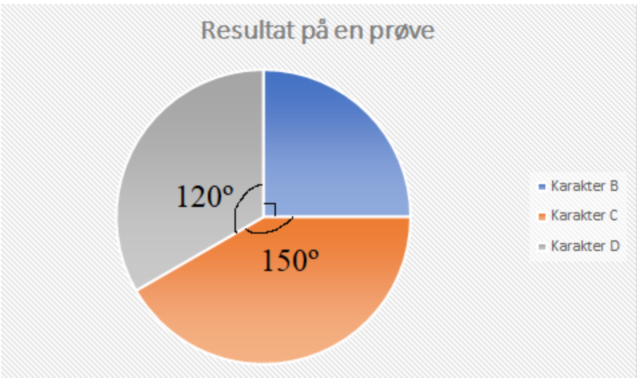
$$\{2, 9, 13, 5, 6, 21, 11, 7, 13, 13\}.$$

a) Finn henholdsvis typeverdi, median og gjennomsnittsverdi.

b) Er det mulig å fjerne to av disse trærne sånn at de gjenstående åtte trærne har gjennomsnittshøyde 11 m? Hvis ja så skal du forklare hvilke to trær som kan bli fjernet, og hvis nei så skal du begrunne ditt svar.

c) Konstruer en mengde med fem tall slik at typeverdien er 10 og slik at gjennomsnittsverdien er tre ganger så stor som medianen.

d)



Bildet ovenfor viser et sektordiagram over resultatet på en prøve for elever på en skole. Rektor Alfredsson påstår at antallet elever er 90 stykker. Kan dette stemme?

Løsningsforslag:

a) Først setter vi tallene i orden:

$$\{2,5,6,7,9,11,13,13,13,21\}.$$

Typeverdien er 13 da dette er mest frekvent. Medianen er (9+11)/2 = 10.

Gjennomsnittsverdien er

$$\frac{Sum}{Antall} = \frac{100}{10} = 10$$

b) I sånn fall skulle de gjenstående åtte trærne ha total-høyde 8 * 11 = 88 m. De to trærne som skal fjernes må derfor sammen ha høyde 100 – 88 = 12 m. Ved å se på listen ovenfor, ser vi at det er nettopp 5 og 7 som har sum 12. Svaret er derfor ja.

c) En av mange muligheter er

$$\{10,10,20,80,180\}.$$

d) Nei, det kan ikke stemme. 90 grader tilsvarer 1/4 av elevene, 120 grader tilsvarer 1/3 av elevene og 150 grader tilsvarer 5/12 av elevene. For at dette skal være mulig må antallet elever være delelig med 12. Så svaret er at antallet elever er et positivt multiplum av 12, med andre ord kan antallet elever være 12 eller 24 eller 36 eller…. Alternativt kan du argumentere at med 90 elever, så tilsvarer hver elev en vinkel på 360/90 = 4 grader og da blir det problem med at 150 ikke er et multiplum av 4.