SENSORVEILEDNING

Emnekode:	LSV3MAT20 V3
Emnenavn:	V3: Tall, statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet II (5-10)
Eksamensform:	Individuelt, skriftlig eksamen
Dato:	6. desember 2021 9:00-15:00
Hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.
Faglærer(e):	Johan Bredberg (emneansvarlig) Russell Hatami
Eventuelt: Sensorveiledningen består av 17 sider	

Innhold

Denne sensorveiledningen inneholder:

1. **Vurderingskriterier for den enkelte karakter**
2. **Viktige elementer for vurderingen**
3. **Oppgavene med stikkordsmessig løsningsforslag**

1. Vurderingskriterier for den enkelte karakter

	A	B	C	D	E	F
Generelle kriterier Kilde: https://www.uio.no/studier/eksamen/karakterskala/fagspesifikk-karakterbeskrivelse/mn-math.html#skriftlig	**Fremragende** prestasjon der kandidaten har løst problemer som krever fantasi og innsikt. Besvarelsen viser at kandidaten fullt ut behersker både de begrepsmessige, regnetekniske og anvendelsesmessige delene av emnet. Fremstillingen er klar og presis med korrekt bruk av notasjon og fagterminologi. Noen få mindre feil eller blanke punkter kan tillates.	**Meget god** prestasjon der kandidaten har løst problemer som går utover det rutinemessige, og som krever god oversikt over emnet. Besvarelsen viser meget god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset. Fremstillingen er klar og med stort sett riktig bruk av terminologi og notasjon.	**God** Gjennomsnittlig prestasjon der kandidaten har løst oppgaver av middels vanskelighetsgrad fra de fleste deler av kurset. Besvarelsen viser god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har ikke i særlig grad klart å anvende sine ferdigheter og kunnskaper på oppgaver som går ut over det rutinemessige. Fremstillingen er grei å forstå, men kan ha en del formelle mangler.	**Nokså god** Prestasjon under gjennomsnittet der kandidaten har løst eller kommet et stykke på vei med oppgaver fra flere sentrale deler av kurset. Besvarelsen viser kjennskap til de viktigste teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har vanskelig for å komme helt i mål selv på rutinepregede oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men kan ha en god del formelle mangler.	**Tilstrekkelig** Prestasjon som tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Besvarelsen viser at kandidaten har kjennskap til begreper, teknikker og anvendelser fra flere deler av kurset, og at han/hun til en viss grad kan bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men røper klare feil og misforståelser.	**Ikke bestått** Prestasjon som ikke tilfredsstiller minimumskravene. Besvarelsen viser at kandidaten har manglende kjennskap til sentrale teknikker, begreper og anvendelser, eller manglende evne til å bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Besvarelser som bare viser beherskelse av en avgrenset del av emnet, vil normalt havne i denne kategorien.
Prosent av besvarelsen som kan indikere karakter	[92% - 100 %]	[77% - 92 %>	[58% - 77%>	[46 % - 58%>	[40 % - 46%>	[0 % - 40%>

Universitets – og høgskolerådet har utformet disse generelle, kvalitative beskrivelsen av de ulike karakterene:

symbol	betegnelse	generell, ikke fagspesifikk beskrivelse av vurderingskriterier
A	fremragende	Fremragende prestasjon som klart utmerker seg. Kandidaten viser svært god vurderingsevne og stor grad av selvstendighet.
B	meget god	Meget god prestasjon. Kandidaten viser meget god vurderingsevne og selvstendighet.
C	god	Jevnt god prestasjon som er tilfredsstillende på de fleste områder. Kandidaten viser god vurderingsevne og selvstendighet på de viktigste områdene.
D	nokså god	En akseptabel prestasjon med noen vesentlige mangler. Kandidaten viser en viss grad av vurderingsevne og selvstendighet.
E	tilstrekkelig	Prestasjonen tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Kandidaten viser liten vurderingsevne og selvstendighet.
F	ikke bestått	Prestasjon som ikke tilfredsstiller de faglige minimumskravene. Kandidaten viser både manglende vurderingsevne og selvstendighet.

2. Viktige elementer for vurderingen

Nedenfor finnes forslag på løsninger. Det vil selvsagt være flere andre fremgangsmåter som kan gi full uttelling så her må det vurderes i hvert enkelt tilfelle. I gjennomgangen nedenfor er det indikert en maksimumspoengsum for hver av deloppgavene, men det er imidlertid av stor betydning med en helhetlig vurdering.

3. Oppgavene med løsningsforslag

Se nedenfor.

Oppgave 1. $3 + 4 + 3 + 9 + 6 + 5 = 30\%$

a. Bruk primtallsfaktoring til å bestemme om 175 er delelig med henholdsvis 14 og 35.

b.

(i) Finn SFF og MFM til tallene 175 og 10.

(ii) Gi et eksempel fra ungdomsskole-matematikk på når henholdsvis SFF og MFM blir brukt.

c. Lag en liste over tallene som 162 er delelig med (divisorene til 162).

d. Alle tall som er involvert i denne delen er positive heltall. Begrunn følgende påstander:

(i) Summen av to konsekutive (påfølgende) potenser av 12 er delelig med 13.

(ii) Summen av tre konsekutive potenser av 9 er delelig med 13.

(iii) Summen av tre konsekutive kvadrater gir resten 2 ved divisjon med 3.

e.

(i) Er

$$53 \equiv 4 \pmod{20}$$

sant eller falskt? Begrunn ditt svar.

(ii) Er

$$57 \equiv 657 \pmod{300}$$

sant eller falskt? Begrunn ditt svar.

(iii) Har den diofantiske likningen

$$15x + 30y = 121$$

noen løsning?

f.

(i) Bruk et siffer-eksempel for å forklare hvorfor delelighetsregelen med 3 fungerer (du kan altså for eksempel velge deg et tresiffrig tall og arbeide med det).

(ii) Bevis også delelighetsregelen med 3 for et generelt femsiffrigt tall $abcde$.

Løsningsforslag. a. Ved hjelp av primtallsfaktoriseringene

$$175 = 5^2 \cdot 7$$

og

$$14 = 2 \cdot 7$$

og

$$35 = 5 \cdot 7$$

skjønner vi at 175 er delelig med 35 men ikke med 14.

b.

(i) Ettersom

$$175 = 5^2 \cdot 7$$

og

$$10 = 2 \cdot 5$$

innser vi at

$$\mathrm{SFF}(175, 10) = 5$$

samt

$$\mathrm{MFM}(175, 10) = 2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 350.$$

(ii) Største Felles Faktor kan brukes for å forkorte brøk. Minste Felles Multiplum kan brukes for å lage en felles nevnere ved addisjon av to brøk.

c. Vi presenterer to approacher.

En approach er å begynne med å se at blant tallene opp til og med $\sqrt{162} < 13$ så er det 1, 2, 3, 6 og 9 som deler 162. Siden bruker vi divisor-par for å få også divisorene $\frac{162}{9} = 18$, $\frac{162}{6} = 27$, $\frac{162}{3} = 54$, $\frac{162}{2} = 81$ og $\frac{162}{1} = 162$. Så svaret blir $1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54, 81, 162$.

En annen approach er å benytte at divisorer til

$$162 = 2 \cdot 3^4$$

ser ut som

$$2^\alpha \cdot 3^\beta$$

der $0 \leq \alpha \leq 1$ og $0 \leq \beta \leq 4$. Ved bruk av $\alpha = 0$ får vi divisorene 1, 3, 9, 27 og 81. Ved bruk av $\alpha = 1$ får vi divisorene 2, 6, 18, 54 og 162. Så svaret blir $1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54, 81, 162$.

d.

(i)

$$12^N + 12^{N+1} = (1 + 12) \cdot 12^N = 13 \cdot 12^N$$

som åpenbart er delelig med 13.

(ii)

$$9^N + 9^{N+1} + 9^{N+2} = (1 + 9 + 81) \cdot 9^N = 91 \cdot 9^N = 13 \cdot 7 \cdot 9^N$$

som åpenbart er delelig med 13.

(iii)

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = 3(n^2 + 2n + 1) + 2.$$

e.

(i)

$$53 \equiv 4 \pmod{20}$$

er falskt fordi 20 deler ikke forskjellen 49.

(ii)

$$57 \equiv 657 \pmod{300}$$

er sant fordi 300 deler forskjellen 600.

(iii) Heltallsløsning savnes til

$$15x + 30y = 121$$

ettersom VS er et multiplum av 15 mens 121 ikke er delelig med 15.

f.

(i) Bruk et siffer-eksempel for å forklare hvorfor delelighetsregelen med 3 fungerer (du kan altså for eksempel velge deg et tresiffrig tall og arbeide med det).

(ii) Bevis også delelighetsregelen med 3 for et generelt femsiffrigt tall *abcde*.

(i)

$$845 = 8 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5 = (8 + 4 + 5) + 8 \cdot 99 + 4 \cdot 9$$

hvilket viser at tallet 845 og dets tverrsum er like modulo 3, hvilket forteller oss at 845 er delelig med 3 hviss tverrsummen er delelig med 3.

(ii)

$$abcde = 10000a + 1000b + 100c + 10b + a = (a + b + c + d + e) + 9999a + 999b + 99c + 9d$$

hvilket viser at tallet *abcde* og dets tverrsum er like modulo 3, hvilket forteller oss at *abcde* er delelig med 3 hviss tverrsummen er delelig med 3.

Alternativt kan man selvfølgelig skrive ut et bevis med modulo-notasjon.

Oppgave 2. $6 + 6 + 7 + 6 = 25\%$

a.

(i) Hvor mange permutasjoner finnes det av INGER?

(ii) Hvor mange permutasjoner finnes det av PANAMA?

b. Bruk binomial-formelen for å ekspandere ut henholdsvis $(x + 2)^4$ og $(x^4 - 5)^3$.

c.

(i) Gi et kombinatorisk resonemang som begrunner hvorfor

$$\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}.$$

(ii) Tegn begynnelsen av Pascals trekant, og marker ut hvor man kan finne konklusjonen i del (i).

(iii) Gi et algebraisk bevis av

$$\binom{100}{30} + \binom{100}{31} = \binom{101}{31}.$$

d.

(i) Bruk ungdomsskole-matematikk for å finne ekspansjonen til

$$(1 + x + x^3)^4.$$

(ii) En høne legger hver dag 0, 1 eller 3 egg, alle med sannsynlighet 1/3. Bruk del (i) for å beregne sannsynligheten at hønen legger 4 egg under fire dager.

Løsningsforslag. a.

(i) Til første plassen kan vi velge mellom 5 bokstaver, til neste plass mellom 4 bokstaver etc, så svaret blir

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

(ii) Med samme logikk blir her svaret 6! men her er en forskjell, nemlig at vi har tre stykker A som innbørdes kan bli permutert på 3! måter. Derfor må svaret bli

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5!}{6} = 5! = 120.$$

b. Binomial-formelen gir henholdsvis

$$(x+2)^4 = x^4 + \binom{4}{1} \cdot x^3 \cdot 2 + \binom{4}{2} \cdot x^2 \cdot 2^2 + \binom{4}{3} \cdot x \cdot 2^3 + 2^4$$

som gir

$$(x+2)^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$$

og [vi kan betrakte $x^4 - 5$ som $x^4 + (-5)$ jo]

$$(x^4-5)^3 = (x^4)^3 + \binom{3}{1} \cdot (x^4)^2 \cdot (-5) + \binom{3}{2} \cdot x^4 \cdot (-5)^2 + (-5)^3$$

som gir

$$(x^4-5)^3 = x^{12} - 15x^8 + 75x^4 - 125.$$

c.

(i) Tenk deg et rom med 6 personer. HS i

$$\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}$$

representerer antallet måter å velge ut 3 av 6 personer. VS gjør også dette fordi det er summen av antallet måter henholdsvis med og uten Anders si.

(ii)

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 + 10 5 1

1 6 15 $\boxed{20}$ 15 6 1

(iii)

$$\binom{100}{30} + \binom{100}{31} = \binom{101}{31}$$

sier at

$$\frac{100!}{30! \cdot 70!} + \frac{100!}{31! \cdot 69!} = \frac{101!}{31! \cdot 70!}$$

som er ekvivalent med

$$31 \cdot 100! + 70 \cdot 100! = 101!$$

det vil si

$$101 \cdot 100! = 101!$$

hvilket er sant!

d.

(i)

$$(1+x+x^3)^2 = (1+x+x^3)(1+x+x^3) = 1+2x+x^2+2x^3+2x^4+x^6$$

som innebærer at

$$(1+x+x^3)^4 = (1+2x+x^2+2x^3+2x^4+x^6)(1+2x+x^2+2x^3+2x^4+x^6)$$

som ved ekspansjon og forenkling fører til

$$(1+x+x^3)^4 = 1+4x+6x^2+8x^3+13x^4+12x^5+10x^6+12x^7+6x^8+4x^9+4x^{10}+x^{12}.$$

(ii) Vi kobler hønen til ekspansjonen av

$$(1+x+x^3)\cdot(1+x+x^3)\cdot(1+x+x^3)\cdot(1+x+x^3)$$

gjennom å tenke at f.eks. $0+3+1+1=5$ egg går hånd i hånd med leddet $1\cdot x^3\cdot x\cdot x = x^5$. Ettersom alle kombinasjoner grunnet symmetri er like sannsynlige, forteller

$$(1+x+x^3)^4 = 1+4x+6x^2+8x^3+13x^4+12x^5+10x^6+12x^7+6x^8+4x^9+4x^{10}+x^{12}$$

oss at der er 13 gunstige og $3^4 = 81$ totale muligheter — Svaret blir altså 13/81.

Oppgave 3. $6 + 4 + 5 = 15\%$

a. Olav Lunde har skrevet om fire ulike mulige årsaker/forklaringsmåter til matematikkvansker. Du skal si hvilke disse fire er, samt kort beskrive dem.

b. Beskriv forskjellen på statisk og dynamisk kartlegging.

c. Skriv kort om hva diagnostisk undervisning er for noe.

Løsningsforslag. Dette er ganske åpne spørsmål der en helhetlig bedømning er ekstra viktig. Men nedenfor er noen punkter som godt kan bli med.

a. Lunde skriver om nevrologiske (kognitive funksjoner, f.eks. problem med hukommelse), psykologiske (f.eks. manglende motivasjon eler angst), sosiologiske (f.eks. elever fra et understimulert miljø) og didaktiske forklaringsmåter (f.eks. feil undervisningsmetoder).

b. Statisk kartlegging, også kalt kvantitativ testing, gir et bilde av hva elever har lært eller med andre ord læringsproduktet. Dynamisk kartlegging, også kalt kvalitativ testing, gir et bilde av elevers læringspotensial, mer presist kan man som lærer gi hints til eleven for å undersøke hva som skal til for at eleven skal klare oppgaven. Så i forbindelse med statisk kartlegging finner man ut hva eleven allerede kan mens man med dynamisk kartlegging heller er fokusert på den proksimale utviklingssonen, altså oppgaver som eleven nesten men ikke helt kan løse.

c. Diagnostisk undervisning dreier seg om at som lærer forsøker få fram og diskutere misoppfatninger som finnes hos elever. Misoppfatninger er ikke som feil tilfeldige uten bygger på bestemte tanker. Tanken bak diagnostisk undervisning er å lage en situasjon der eleven skjønner at misoppfatningen faktisk må være just en misoppfatning — eleven erfarer en kognitiv konflikt og må dermed rekonstruere sin oppfattning om den matematiske situasjonen. Til slutt kan man arbeide med noen ytterligere eksempel for å konsolidere den nye oppfatningen.

Oppgave 4. $8+6+6=20\%$

a. Første semifinalen vinner Carlsen og Fressinet med sannsynlighet henholdsvis $\frac{3}{4}$ og $\frac{1}{4}$. Andre semifinalen vinner Anand og Bacrot med sannsynlighet henholdsvis $\frac{3}{5}$ og $\frac{2}{5}$. Semifinalene er selvfølgelig uavhengige. Hva er sannsynligheten at enten Carlsen eller Anand går til finale? — Beregn dette på tre forskjellige måter!

b. Når Nadal spiller tennis mot Ruud, vinner Nadal sets med sannsynlighet 60 %. La oss si at de møtes i en best-av-tre-sets kamp. Bruk ungdomsskole-matematikk for å beregne sannsynligheten for at Nadal vinner kampen.

c. Når Nadal spiller tennis mot Ruud, vinner Nadal sets med sannsynlighet 60 %. La oss si at de møtes i en best-av-fem-sets kamp. Bruk binomisk sannsynlighet for å beregne sannsynligheten for at Nadal vinner kampen.

Løsningsforslag. a. En fremgangsmåte er å tenke at ingen av dem går til finale med sannsynlighet $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$ sånn at svaret er $\frac{9}{10}$.

En andre fremgangsmåte er å lage et bilde over utfall som følger [vi husker på at semifinalene er uavhengige]:

	Anand	Bacrot
Carlsen	9/20	6/20
Fressinet	3/20	2/20

Så svaret blir

$$\frac{9}{20} + \frac{6}{20} + \frac{3}{20} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}.$$

En tredje fremgangsmåte er å bruke

$$P(C \cup A) = P(C) + P(A) - P(C \cap A) = \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{15}{20} + \frac{12}{20} - \frac{9}{20} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}.$$

b. Man kan godt lage et tre-diagram. Alternativt kan man bruke algebra som følger:

$$P(N,N,N)+P(N,N,R)+P(N,R,N)+P(R,N,N) = 0.6^3+3\cdot 0.6^2\cdot 0.4 = 0.216+0.432 = 0.648.$$

c. Det er nok enklest å tenke seg at fem sets blir spillt. Nadal må da vinne 3, 4 eller 5 sets. Ifølge binomisk sannsynlighet:

$$P(\text{tre}) = \binom{5}{3} \cdot 0.6^3 \cdot 0.4^2 = 0.3456$$

og

$$P(\text{fire}) = \binom{5}{4} \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^1 = 0.2592$$

og

$$P(\text{fem}) = 0.6^5 = 0.07776.$$

Således blir sjansen at Nadal vinner kampen

$$0.3456 + 0.2592 + 0.07776 = 0.68256.$$

Oppgave 5. $4 + 6 = 10\%$

a. Mathias som går på videregående skole brukte hypergeometrisk sannsynlighet for å løse en tekstoppgave. Hans riktige svar på tekstoppgaven var

$$\frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{28}{55}.$$

Skriv et forslag på en slik tekstoppgave.

b. Løs din tekstoppgave ved hjelp av ungdomsskole-matematikk.

Løsningsforslag. a. I et klasserom finnes 8 jenter og 4 gutter. Tre personer velges tilfeldig: hva er sannsynligheten for å velge akkurat 2 jenter?

b. Man kan godt lage et tre-diagram. Alternativt kan man gå direkte til algebra som følger:

$$P(G,J,J)+P(J,G,J)+P(J,J,G) = \frac{4}{12}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{7}{10}+\frac{8}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{7}{10}+\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{4}{10} = \frac{3\cdot 4\cdot 8\cdot 7}{12\cdot 11\cdot 10} = \frac{28}{55}.$$