Høgskolen i Østfold

Høst2022

Tall, måling, statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet (5 - 10)

LSV1MAT20-1 22H

1) **Eksamensoppgaven med løsningsforslag side 5 til og med 17.**

Den inneholder fasit og forslag eller kommentarer til ulike fremgangsmåter.

Generelt skal studentene begrunne alle sine svar.

2) **Vurderingskriterer side 3 og 4.**

Høgskolen i Østfold

Eksamen med løsningsforslag

Emnekode: **LSV1MAT20-1 22H**	**LSV1MAT20-1 22H** **Tall, statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet (5-10)**
Dato: 14.01.2022	**Eksamenstid:** **kl 9.00 til kl 15.00**
Hjelpemidler: Kalkulator og passer	**Faglærere:** **Audun Rojahn Olafsen** **Khaled Jemai** **Ali Ludvigsen**

Eksamensoppgaven:

Oppgavesettet består av 7 sider inklusiv denne forsiden. Kontroller at oppgaven er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 7 oppgaver. Alle oppgavene skal besvares. Vis utregning eller begrunn svarene.

Sensurdato: 04.01.2023

Karakterene er tilgjengelige for studenter på studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. Følg instruksjoner gitt på: www.hiof.no/studentweb

Den inneholder fasit og forslag eller kommentarer til ulike fremgangsmåter.

Generelt skal studentene begrunne alle sine svar og vise utregning.

Fagspesifikke karakterbeskrivelser:

Beskrivelsen under er veiledende i forhold til å sette karakter, derfor må besvarelsen også vurderes i sin helhet.

Symbol	Betegnelse	Beskrivelse
A	**Fremragende**	**Generelt:** **Fremragende prestasjon der kandidaten har løst problemer som krever fantasi og innsikt. Besvarelsen viser at kandidaten fullt ut behersker både de begrepsmessige, regnetekniske og anvendelsesmessige delene av emnet. Fremstillingen er klar og presis med korrekt bruk av notasjon og fagterminologi. Noen få mindre feil eller blanke punkter kan tillates.** **Klart ca 95% av besvarelsen**
B	**Meget god**	**Generelt:** **Meget god prestasjon der kandidaten har løst problemer som går utover det rutinemessige, og som krever god oversikt over emnet. Besvarelsen viser meget god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset. Fremstillingen er klar og med stort sett riktig bruk av terminologi og notasjon.** **Klart ca 80% av besvarelsen**
C	**God**	**Generelt:** **Gjennomsnittlig prestasjon der kandidaten har løst oppgaver av middels vanskelighetsgrad fra de fleste deler av kurset. Besvarelsen viser god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har ikke i særlig grad klart å anvende sine**

		ferdigheter og kunnskaper på oppgaver som går ut over det rutinemessige. Fremstillingen er grei å forstå, men kan ha en del formelle mangler. **Klart ca 60% av besvarelsen**
D	**Nokså god**	**Generelt:** **Prestasjon under gjennomsnittet der kandidaten har løst eller kommet et stykke på vei med oppgaver fra flere sentrale deler av kurset. Besvarelsen viser kjennskap til de viktigste teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har vanskelig for å komme helt i mål selv på rutinepregede oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men kan ha en god del formelle mangler.** **Klart ca 47% av besvarelsen**
E	**Tilstrekkelig**	**Generelt:** **Prestasjon som tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Besvarelsen viser at kandidaten har kjennskap til begreper, teknikker og anvendelser fra flere deler av kurset, og at han/hun til en viss grad kan bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men røper klare feil og misforståelser.** **Klart ca 40% av besvarelsen**
F	**Ikke bestått**	**Generelt:** **Prestasjon som ikke tilfredsstiller minimumskravene. Besvarelsen viser at kandidaten har manglende kjennskap til sentrale teknikker, begreper og anvendelser, eller manglende evne til å bruke sine kunnskapene til å løse oppgaver. Besvarelser som bare viser beherskelse av en avgrenset del av emnet, vil normalt havne i denne kategorien.**

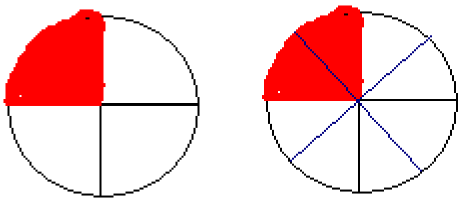
Oppgave 1) (20%) De fire regneartene.

Nedenfor er det angitt hva som kreves for full uttelling på hver deloppgave. Innholdet må være tilsvarende, ordene/formuleringene må ikke være identiske. Ved ufullstendig svar må det vurderes i hvert tilfelle hvor mye som skal trekkes.

a) Løs disse regnestykkene. Bruk 2 ulike strategier på hver av dem. (5%)
   a. 19 + 8 = 27 (1%)
      Stikkord: tallinje, skriftlig hoderegning som via 20.
      20+8-1=27 19+10-2=27
   b. 82 – 29 = 53 (1%)
      Stikkord: skriftlig hoderegning som f.eks 82 – 30 + 1. eller 83-30=53
      Tallinje, eller oppstilt subtraksjon
   c. 24 · 6 = 144 (1%)
      *Eks: 20 * 6 + 4 * 6 eller 12 * 12 eller 25 * 6 – 6 eller areal av rektangel (20 + 4) * 6 eller oppstilt multiplikasjon.*
   d. 3,5 · 14 = 49 (1%)
      *Eks: doble og halvere 7 * 7, (3 + 0,5) * 14, areal mm*
   e. 147 : 3 = 49 (1%)
      Eks: 150/ 3 – 3/3 , 120/3 + 127/3, oppstilt divisjon, mm

b) Forklar med en tegning hva det vil si å utvide en brøk. (5%)
   Brøk kan tolkes som forhold mellom to tall. Når vi utvider en brøk med vilkårlig tall *k*, endrer ikke vi forhold mellom disse tallene.

   Altså: $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ med andre ord $\frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{4}$, vi har utvidet $\frac{1}{4}$ med 2 uten å endre forholden til brøken.



c) Regn ut (vis fremgangsmåten) (3%)

   i) $1+\frac{4}{6}-\frac{2}{4}=1+\frac{4}{6}-\frac{1}{2}=\frac{6}{6}+\frac{4}{6}-\frac{3}{6}=\frac{6+4-3}{6}=\frac{7}{6}$ eller $1\frac{1}{6}$

ii) $\frac{2}{5}:\frac{1}{2}=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{1}=\frac{4}{5}$

iii) $\frac{5}{10}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{10}{7}=\frac{\cancel{5}}{\cancel{10}}\cdot\frac{\cancel{7}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{10}}{\cancel{7}}=1$

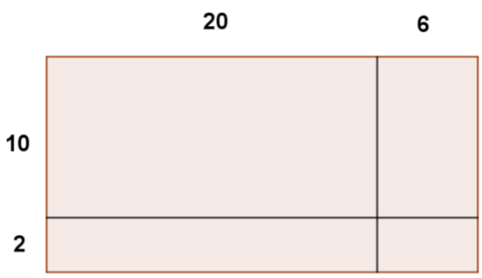
d) Skriv som brøk: (4%)

i) $0{,}125=\frac{125}{1000}=\frac{1}{8}$ (1%)

og ii) 0,121212121212 ….. (3%)

$$\begin{cases} x=0{,}12121212\cdots \\ 100x=12{,}12121212\cdots \\ 100x-x=12 \\ 99x=12 \\ x=\frac{12}{99}=\frac{4}{\underline{\underline{33}}} \end{cases}$$

e) Forklar elever med en tegning at $26\cdot 12=312$ (3%)



$$26\cdot 12=20\cdot 10+20\cdot 2+6\cdot 10+6\cdot 2=200+40+60+12=312$$

Oppgave 2) tallsystemet (20 %)

Nedenfor er det angitt hva som kreves for full uttelling på hver deloppgave. Innholdet må være tilsvarende, ordene/formuleringene må ikke være identiske. Ved ufullstendig svar må det vurderes i hvert tilfelle hvor mye som skal trekkes.

A)

Hvis vi konverterer til titallsystem: (3%)

$$\mathbf{10010_2 = 0\cdot 2^0 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^4 = 18}$$

$$\mathbf{10100_2 = 0\cdot 2^0 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^4 = 20}$$

$\mathbf{10100_2}$ **er større enn** $\mathbf{10010_2}$

N.B. vi kan akseptere andre begrunnelser.

b) Vi kan konvertere mellom oktal og binær tallsystemene som følgende:

Hver gruppe på tre konverteres til et oktalt siffer etter følgende regel: (6%)

Binær	000	001	010	011	100	101	110	111
Oktal	0	1	2	3	4	5	6	7

$$1110_2 = 001\ 110_2 = 16_8 = 1 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = 1 \cdot 8 + 6 \cdot 1 = 14$$

$$101011_2 = 53_8 = 5 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 5 \cdot 8 + 3 \cdot 1 = 43$$

$$15_8 = 001\ 101_2 = 1101_2$$

$$15_8 = 1 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 1 \cdot 8 + 5 \cdot 1 = 13$$

$$20 = 16 + 4 = 2 \cdot 8 + 4 \cdot 8^0 = 24_8 = 010\ 100_2 = 10100_2$$

Binære tall	1110_2	101011_2	1101_2	10100_2
Oktale tall	16_8	53_8	15_8	24_8
Vanlige tall	14	43	13	20

Vi godtar besvarelser som regner ut fra det oktale tallsystemet til 10 tallsystemet, deretter fra 10 tallsystemet til det binære tallsystemet

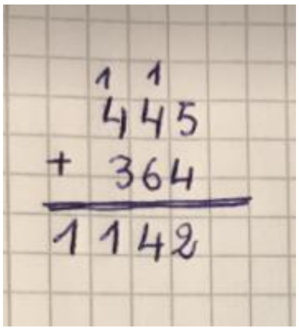
C) (2%+2%)

1)

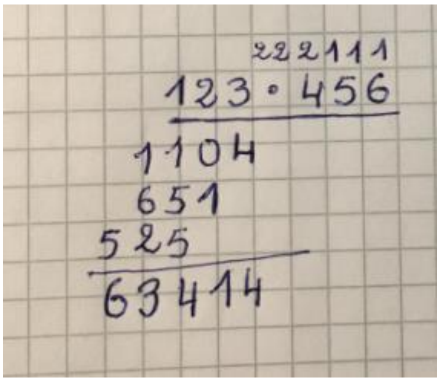
+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	10
2	3	4	5	6	10	11
3	4	5	6	10	11	12
4	5	6	10	11	12	13
5	6	10	11	12	13	14
6	10	11	12	13	14	15

·	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	11	13	15
3	3	6	12	15	21	24
4	4	11	15	22	26	33
5	5	13	21	26	34	42
6	6	15	24	33	42	51

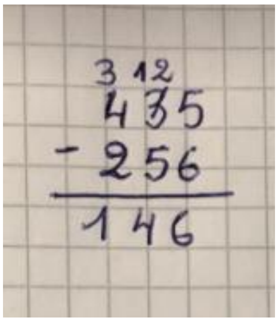
D) (2%)



E. (2%)



F. (3%)



Oppgave 3) (10%) Tallforståelse.

Nedenfor er det angitt hva som kreves for full uttelling på hver deloppgave. Innholdet må være tilsvarende, ordene/formuleringene må ikke være identiske. Ved ufullstendig svar må det vurderes i hvert tilfelle hvor mye som skal trekkes.

a) Skriv ett tall større enn femti og mindre enn nitti som er: **(2,5%)**
   a. Delelig med 2
      Løsningsforslag : eks: 52 , 54 osv
   b. Delelig med 3
      Løsningsforslag : Eks 60, 63, osv. Tverrsummen er delelig med 3.

   c. Partall og er delelig med 5
      Løsningsforslag : eks: 60 . både delelig med 5 og 2 samtidig

b) Vurder om dette er mulig. Begrunn svaret. **(2,5%)**
   a. Ett tall er oddetall og er delelig med 8.
      Ikke mulig, pga 8 har 2 som faktor og må da være et partall.

   b. Ett tall er primtall og er delelig med 11.
      Løsningsforslag : ja, 11

   c. Alle partall er delelig med 4.

      Løsningsforslag : Nei, de siste to sifrene må være delelig med 4.
      Man kan også argumentere at 4-gange tabellen (multiplum av 4) inneholder ikke alle partallene men deler av dem.

c) Grete prutet på ei jakke og fikk 15 % avslag på prisen, Hun sparte dermed 80 kr. Hva kostet jakka før prisavslaget? **(2,5%)**

   Løsningsforslag : Ulike fremgangsmåter som gir riktig svar: her er det et forslag:

   $\frac{80kr}{15\%} = 5,34 \, {}^{kr}\!/_{\%}$ altså 5,34 kroner per prosent. Multipliserer med 100% får vi prisen til jakka.

   $5,34\frac{kr}{\cancel{\%}} \cdot 100\cancel{\%} = 534kr$

d) Inger har fått følgende oppgave: **(2,5%)**
   Hva er 22% av 50?

Hun regner den slik:
22% · 50 = 50% · 22 = 0,5 · 22 = 11

Forklar hvorfor denne metoden er rett!

Løsningsforslag : 22% · 50 = 22 ·1/100· 50 = 50 ·1/100· 22 = 50 % · 22

Oppgave 4) Kombinatorikk (10%)

Nedenfor er det angitt hva som kreves for full uttelling på hver deloppgave. Innholdet må være tilsvarende, ordene/formuleringene må ikke være identiske. Ved ufullstendig svar må det vurderes i hvert tilfelle hvor mye som skal trekkes.

Norske bilskilt består av to bokstaver og 5 siffer, f.eks KZ52573.

Bokstavene er blant de 20 bokstavene
A, B, C, D, E, F, H, J, K, L, N, P, R, S, T, U, V, X, Y og Z

a) Hvor mange forskjellige bilskilt kan lages? **(2,5%)**

   Løsningsforslag: Det er 20 muligheter til første bokstav, og 20 for andre, så det er 20· 20 mulige bokstavkombinasjoner. For hver av disse er det 10 muligheter til å velge første siffer etc,
   20 · 20 · 10 · 10 · 10 · 10 · 10= 40 000 000

b) Hvor mange forskjellige bilskilt kan lages dersom første siffer ikke kan være 0? **(2,5%)**

   Løsningsforslag: Det er 20 muligheter til første bokstav, og 20 for andre, så det er 20 · 20 mulige bokstavkombinasjoner. For hver av disse er det 9 muligheter til å velge første siffer, og 10 for hver av de 4 neste, så gjentatt bruk av multiplikasjonsprinsipet gir at antallet er 20 · 20 · 9 · 10 · 10 · 10 · 10 = 36 000 000

Et ”ord” skal bestå av de 5 bokstavene a, b, c, d og e brukt nøyaktig en gang hver, men behøver ikke ha noen språklig betydning. For eksempel er dcaeb et slikt ord.

c) Hvor mange slike ord er det mulig å lage? **(2,5%)**

Løsningsforslag: Dette er antall måter å sortere disse 5 bokstavene på,
altså $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

d) Hvor mange slike ord med tre bokstaver (blant de 5) er det mulig å lage? **(2,5%)**

Løsningsforslag: Ordnet utvalg uten tilbakelegging, 3 av de 5 bokstavene a, b, c, d og e skal velges ut. Antallet er da $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Oppgave 5) Sannsynlighet (10%)

a) Hva menes med uniform sannsynlighetsmodell? Gi et eksempel på slik modell. **(2,5%)**

Løsningsforslag: Uniform sannsynlighetsmodell Alle enkeltutfall i et forsøk er like sannsynlige for eksempel mynt kast, terning kast.

b) La u1, u2 og u3 være tre enkeltutfall. Hva er galt med denne sannsynlighetsmodellen? **(2,5%)**

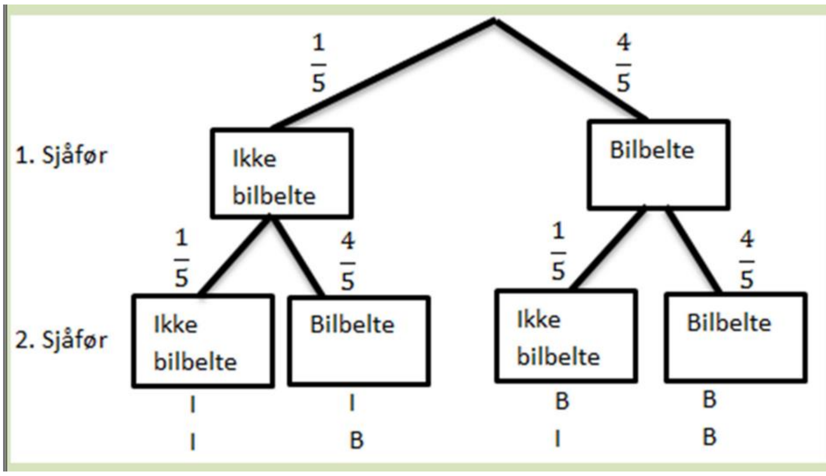
U1	U2	U3
0,2	0,9	0,1

Løsningsforslag: I en sannsynlighetsmodell er summen av sannsynlighetene til alle utfallene er til sammen lik 1 (100%)

$$u_1 + u_2 + u_3 \neq 1$$

i dette tilfelle $0,2 + 0,9 + 0,1 = 1,2$

Vi antar at det er 80% sannsynlighet for at en tilfeldig valgt bilfører bruker bilbelte. Vi kontrollerer to tilfeldige bilførere. Lage valgtre og svar på følgende spørsmål.



c) Hva er sannsynligheten for at en bruker bilbelte? **(2,5%)**
Løsningsforslag: At kun en bruker bilbelte tilsvarer alternativ IB og BI.
altså; $P(IB) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{25}$ og $P(BI) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$

p(kun en bruker bilbelte) = $P(IB) + P(BI) = \frac{4}{25} + \frac{4}{25} = \frac{8}{25} = 32\%$

d) Hva er sannsynligheten for at begge bruker bilbelte? **(2,5%)**
Løsningsforslag: At begge bruker bilbelte, tilsvarer alternativet merket BB.
$p(BB) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{25} = 64\%$

Oppgave 6) Didaktikk (10%)

Nedenfor er det angitt hva som kreves for full uttelling på hver deloppgave. Innholdet må være tilsvarende, ordene/formuleringene må ikke være identiske. Ved ufullstendig svar må det vurderes i hvert tilfelle hvor mye som skal trekkes.

a) Hva menes med diagnostisk oppgave? **(4%)**

Løsningsforslag: En diagnostisk oppgave er en oppgave laget for å avdekke en gitt misoppfatning hos elevene, slik at: Elever med misoppfatningen sk al ikke kunne få riktig svar. I størst mulig grad skal det være mulig å se fra et feil svar om feilen skyldes misoppfatningen eller andre grunner.

b) Følgende oppgave gitt til 8 – 10 årstrinn. Drøft de mulige misoppfatningene som kan være årsak til disse svarene. (altså : A gir størst sjanse, og det er like sjanse i begge krukkene.) **(6%)**


Oppgave 2

Du har to krukker med svarte og hvite klinkekuler. Det er ikke mulig å se kulene når du trekker. Du skal trekke én kule fra hver krukke.

Hvilken krukke gir størst sjanse for å trekke en hvit kule?

- A gir størst sjanse
- B gir størst sjanse
- Det er lik sjanse i begge krukkene

Oppgave 2 Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk 8 – 10	8. årstrinn	10. årstrinn
Ubesvart	0	0,2
A gir størst sjanse	20	14
B gir størst sjanse (**Riktig svar**)	43	57
Det er lik sjanse i begge krukkene	37	29

Tabell 13: Prosentvis fordeling. Oppgave 2 SSK 8 – 10. Krukker. Størst sjanse.

Løsningsforslag:

A gir størst sjanse:
Oppgaven avdekker en vanlig misoppfatning hos elevene: de velger den krukken det er flest hvite kuler. De knytter altså sannsynlighet til antallet hvite kuler og beregner ikke forholdet mellom gunstige utfall (hvite kuler) og mulige utfall (alle kulene) for hver av krukkene:

$$P(\text{Hvit kule})_{\text{Krukke A}} = \frac{3}{5} \qquad P(\text{Hvit kule})_{\text{Krukke B}} = \frac{2}{3}$$

Det er lik sjanse i begge krukkene:

Det andre feilsvaret, at det skal være lik sjanse for å trekke en hvit kule i begge krukkene, kan komme av at elevene har problemer med å sammenligne brøker og at de antar at brøkene har lik verdi – altså lik sjanse.

Oppgaven avdekker også misoppfatning hos elevene som ser på forholdet mellom gunstige utfall (hvite kuler) og (svarte kulene) istedenfor mulige utfall (alle kulene).

Oppgave 7) Statistikk (20%)

Tabellen viser antall scoret og innslupne mål i tillegg til poengsummen for lagene i damenes eliteserie i fotball desember 2022 etter 18 kamper.

Lag	Antall scoret mål	Antall innslupne mål	Poeng
Brann	53	13	46
Rosenborg	40	12	41
Vålerenga	48	12	39
Stabæk	23	22	27
Kolbotn	27	22	26
Lyn	22	26	26
Lsk-Kvinner	23	21	23
Arna-Bjørnar	18	53	14
Avaldsnes	15	50	11
Røa	9	47	3

a) Hvor mange mål har Brann scoret i gjennomsnitt på kamp? ($\mathbf{2}\%$)

b) Alle lagene har til sammen scoret 278 mål. Hvor mange mål blir i gjennomsnittet per lag? Hva er medianen? ($\mathbf{3}\%$)

c) Hvor mange mål har lagene sluppet inn i gjennomsnittet? Hva blir medianen? (3%)

d) Hva er den gjennomsnittlige poengsummen for et lag i damenes eliteserie? Finn også variasjonsbredde og standardavviket. ($\mathbf{7}\%$)

e) Bruk poengsummene til å regne ut medianen og kvartilbredden. Hva forteller kvartilbredden oss? ($\mathbf{5}\%$)

Løsningsforslag :

Nedenfor er det angitt hva som kreves for full uttelling på hver deloppgave. Innholdet må være tilsvarende, ordene/formuleringene må ikke være identiske. Ved ufullstendig svar må det vurderes i hvert tilfelle hvor mye som skal trekkes.

a) **Brann har scoret:** $\frac{\mathbf{53\ mål}}{\mathbf{18\ kamper}} = \mathbf{2,94}$ **mål per kamp.**

b) **Hvert lag har i gjennomsnittet scoret:** $\frac{\mathbf{278\ mål}}{\mathbf{10\ lag}} = \mathbf{27,8}$ **mål per lag.**

Vi finner medianen: $\mathbf{9, 15, 18, 22, 23, 23, 27, 40, 48, 53}$

Medianen er: $\frac{(\mathbf{23+23})\mathbf{mål}}{\mathbf{2}} = \mathbf{23\ mål.}$

c) **Hvert lag har i gjennomsnitt sluppet inn 2,94 mål (like mange som det er scoret).**

Vi finner medianen: $\mathbf{12, 12, 13, 21, 22, 22, 26, 47, 50, 53}$

Medianen er: $\frac{(\mathbf{22+22})\mathbf{mål}}{\mathbf{2}} = \mathbf{22\ mål.}$

d) $\frac{\mathbf{46+41+39+27+26+26+23+14+11+3}}{\mathbf{10}} = \mathbf{25,6}$

Den gjennomsnittlige poengsum er $\mathbf{25,6}$

variasjonsbredde er $(\mathbf{46-3})\ \mathbf{poeng} = \mathbf{43\ poeng}$.

Poeng	$\boldsymbol{x-\bar{x}}$	$(\boldsymbol{x-\bar{x}})^2$
$\mathbf{46}$	$\mathbf{20,4}$	$\mathbf{416,16}$
$\mathbf{41}$	$\mathbf{15,4}$	$\mathbf{237,16}$
$\mathbf{39}$	$\mathbf{13,4}$	$\mathbf{179,56}$
$\mathbf{27}$	$\mathbf{1,4}$	$\mathbf{1,96}$
$\mathbf{26}$	$\mathbf{0,4}$	$\mathbf{0,16}$
$\mathbf{26}$	$\mathbf{0,4}$	$\mathbf{0,16}$
$\mathbf{23}$	$\mathbf{-2,6}$	$\mathbf{6,76}$
$\mathbf{14}$	$\mathbf{-11,6}$	$\mathbf{134,56}$
$\mathbf{11}$	$\mathbf{-14,6}$	$\mathbf{213,16}$
$\mathbf{3}$	$\mathbf{-22,6}$	$\mathbf{510,76}$

Sum =	$\mathbf{1700,4}$
Varians =	$\mathbf{170,04}$

Standardavvik = $\sqrt{\mathbf{Varians}} \approx \mathbf{13}$

e) Vi finner medianen:

$$\mathbf{3, 11, 14, 23, 26, 26, 27, 39, 41, 46}$$

Medianen er: $\frac{\mathbf{(26+26)poeng}}{\mathbf{2}} = \mathbf{26\ poeng}$

Øvre kvartil er $\mathbf{39}$ og nedre kvartil er $\mathbf{14}$ og kvartilbredden er $\mathbf{25}$.

Kvartilbredden forteller oss hvor stor spredning det er i den halvdelen av datamaterialet som ligger nærmest medianen.