Høgskolen i Østfold

MAT103

Algebra, funksjoner og geometri II

1-7

SENSORVEILEDNING

1) Vurderingskriterer side 2 og 3.
2) Eksamensoppgaven med løsningsforslag side 4 til og med 14.

   Den inneholder fasit og forslag eller kommentarer til ulike fremgangsmåter.

   Generelt skal studentene begrunne alle sine svar.

   En didaktikk oppgave er gitt. Det er viktig at elevene får frem sin forståelse fremfor om alle punktene er med.

Høgskolen i Østfold

Fagspesifikke karakterbeskrivelser:
Beskrivelsen under er veiledende i forhold til å sette karakter, derfor må besvarelsen også vurderes i sin helhet.

Symbol	Betegnelse	Beskrivelse
A	Fremragende	Generelt: Fremragende prestasjon der kandidaten har løst problemer som krever fantasi og innsikt. Besvarelsen viser at kandidaten fullt ut behersker både de begrepsmessige, regnetekniske og anvendelsesmessige delene av emnet. Fremstillingen er klar og presis med korrekt bruk av notasjon og fagterminologi. Noen få mindre feil eller blanke punkter kan tillates. Klart ca 95% av besvarelsen
B	Meget god	Generelt: Meget god prestasjon der kandidaten har løst problemer som går utover det rutinemessige, og som krever god oversikt over emnet. Besvarelsen viser meget god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset. Fremstillingen er klar og med stort sett riktig bruk av terminologi og notasjon. Klart ca 80% av besvarelsen
C	God	Generelt: Gjennomsnittlig prestasjon der kandidaten har løst oppgaver av middels vanskelighetsgrad fra de fleste deler av kurset. Besvarelsen viser god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har ikke i særlig grad klart å anvende sine ferdigheter og kunnskaper på oppgaver som går ut over det rutinemessige. Fremstillingen er grei å forstå, men kan ha en del formelle mangler. Klart ca 60% av besvarelsen
D	Nokså god	Generelt: Prestasjon under gjennomsnittet der kandidaten har løst eller kommet et stykke på vei med oppgaver fra flere sentrale deler av kurset. Besvarelsen viser kjennskap til de viktigste teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har vanskelig for å komme helt i mål selv på rutinepregede oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men kan ha en god del formelle mangler. Klart ca 47% av besvarelsen

E	Tilstrekkelig	Generelt: Prestasjon som tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Besvarelsen viser at kandidaten har kjennskap til begreper, teknikker og anvendelser fra flere deler av kurset, og at han/hun til en viss grad kan bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men røper klare feil og misforståelser. Klart ca 40% av besvarelsen
F	Ikke bestått	Generelt: Prestasjon som ikke tilfredsstiller minimumskravene. Besvarelsen viser at kandidaten har manglende kjennskap til sentrale teknikker, begreper og anvendelser, eller manglende evne til å bruke sine kunnskapene til å løse oppgaver. Besvarelser som bare viser beherskelse av en avgrenset del av emnet, vil normalt havne i denne kategorien.

EKSAMEN

Emnekode:	**Emnenavn:**
LMBMAT10320-1 22V	**MAT103 Algebra, funksjoner og geometri II (1-7)**
Dato:	**Eksamenstid:**
14. mai 2024	09:00 – 15:00
Hjelpemidler:	**Faglærere:**
Numerisk kalkulator	Ali Ludvigsen Audun Rojahn Olafsen

Om eksamensoppgaven og poengberegning:

Oppgavesettet består av **9** sider inklusiv denne forsiden.

Kontroller at oppgaven er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

6 oppgaver skal besvares og teller som angitt ved sensurering.

Dere må vise utregninger eller begrunne svarene.

Sensurfrist:

Karakterene er tilgjengelige for studenter på Studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. www.hiof.no/studentweb

Oppgave 1) (4 + 2+ 4 + 5 + 5) 20 %

a) Bruk potensreglene og regn ut

1% per del

i) $x^2 \cdot x^5 = x^{2+5} = x^7$

ii) $\frac{(ab)^2}{a^2 \cdot b} = \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 \cdot b} = b$

iii) $3^2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3^2 = 3^6$

iv) $(3^2)^2 = 3^{2 \cdot 2} = 3^4$

b) Skriv følgende tall på standardform:

i) $1230000 = 1,23 \cdot 10^6$

ii) $0,00005 = 5 \cdot 10^{-5}$

c) Regn ut (vis utregning).

i) $3 \cdot 2 - 5\left(\frac{25-20}{5}\right) + \frac{2 \cdot 3 + 8}{5+2} = 6 - 5 \cdot 1 + 2 = 3$

ii) $5 \cdot \frac{4}{2} + \frac{(42-3)}{5-\frac{4}{2}} - \frac{3^2}{(5-2)^2} = 5 \cdot 2 + \frac{39}{3} - \frac{9}{9} = 10 + 13 - 1 = 22$

d) Løs likningene

Studenten står fritt å velge løsningsmetoden: Kan bruke $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ eller faktorisere utrykket der det er mulig.

i) $x^2 - 4x = x(x-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

ii) $-2x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -0,5 \\ x = 1 \end{cases}$

e) Vis at polynomet $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ er delelig med $(x-2)$.
Utfør divisjonen $\left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right) : (x-2)$

$p(x)$ er delelig med $(x-2)$ dersom: $p(2) = 0$

$p(2) = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$

$p(2) = 0$

$$
\begin{aligned}
& x^3 - 6x^2 + 11x - 6 : (x-2) = x^2 - 4x + 3 \\
& \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
& \quad -4x^2 + 11x - 6 \\
& \quad \underline{-(-4x^2 + 8x)} \\
& \qquad\qquad 3x - 6 \\
& \qquad\quad \underline{-(3x - 6)} \\
& \qquad\qquad\quad 0
\end{aligned}
$$

Oppgave 2) (2+2+3+3+4) 14 %

a) Hva er den matematiske definisjonen av begrepet "funksjon"?

En forslag til defensjon kan være:
En funksjon defineres som en regel som tildeler nøyaktig ett element i en mengde A (definisjonsmengden) til ett element i en annen mengde B (verdimengden) .

Det viktigst er å få frem i en formulering at*: en regel som tildeler/tilordner nøyaktig ett element i en mengde A til ett element i en annen mengde B.*

b) Hvilken eller hvilke av grafene nedenfor representerer en **funksjon***?* Begrunn svaret.

Konsekvens av definisjon over fører til såkalt vertikal-linjetest.(Testen sier at en graf representerer en funksjon hvis og bare hvis hver vertikal linje skjærer grafen høyst én gang)

Bilde ii) Dette er ikke en funksjon. Til flere av x-verdiene svarer det mer enn én y-verdi((vertikal-linjetest). De andre grafene represententer funksjon, siden til hver x-verdi svarer det én y-verdi (vertikal-linjetest)

Gitt funksjonen $f(x) = -x^2 + 5x - 4$, der $x \in \mathbf{R}$.

c) Finn skjæringspunktene mellom grafen og koordinataksene.

Skjæring med y-aksen:

$f(0) = -4, \rightarrow (0\,,-4)$

Skjæring med x-aksen:

$f(x) = 0\,,\,-x^2 + 5x - 4 = 0\,, \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$

Nullpunktene: $(1\,,0)$ og $(4\,,0)$

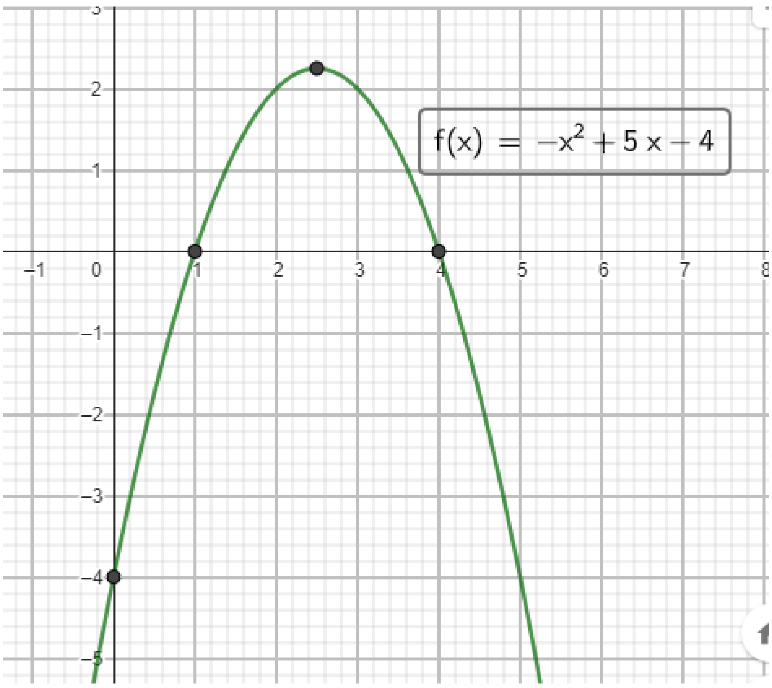
e) Finn ved regning koordinatene til ekstremalpunktet.

To måter; enten bruke symmetrilinje direkte eller derivere først.

Symmetrilinja: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{2\cdot(-1)} = 2{,}5$

Toppunkt: $f(2{,}5) = 2{,}25\,, \rightarrow (2.5\ ,2.25)$

f) Skisser grafen til funksjonen $f(x)$ i et koordinatsystem.



Oppgave 3) (6+3+3+2+4) 18 %

a) Deriver funksjonene

i) $\begin{cases} g(x) = 4 \\ g'(x) = 0 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} k(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{5} - \dfrac{1}{2} \\ k'(x) = x^2 - \dfrac{2x}{5} \end{cases}$ iii) $\begin{cases} h(x) = -x^3 + 5x^2 - 4x \\ h'(x) = -3x^2 + 10x - 4 \end{cases}$

Gitt funksjonen $h(x) = -x^3 + 5x^2 - 4x$, der $x \in \mathbf{R}$.

b) Regn ut nullpunktene.

$$h(x) = x \underbrace{\left(-x^2 + 5x - 4\right)}_{\text{Samme funksjon som oppgave 2}} = 0$$

Nullpunktene: $(0\,,\,0),(1\,,\,0),(4\,,\,0)$

c) Regn ut ekstremalpunktene.
x- verdiene i ekstremalpunktene:

$$h'(x) = -3x^2 + 10x - 4 = 0, \rightarrow \begin{cases} x = 0.46 \\ x = 2.87 \end{cases}$$

Ekstremalpunktene: $h(0.46) = -0.88 \quad , \quad h(2.87) = 6.06$

Bunnpunkt: $(0{,}46\,,\,-0.88)$

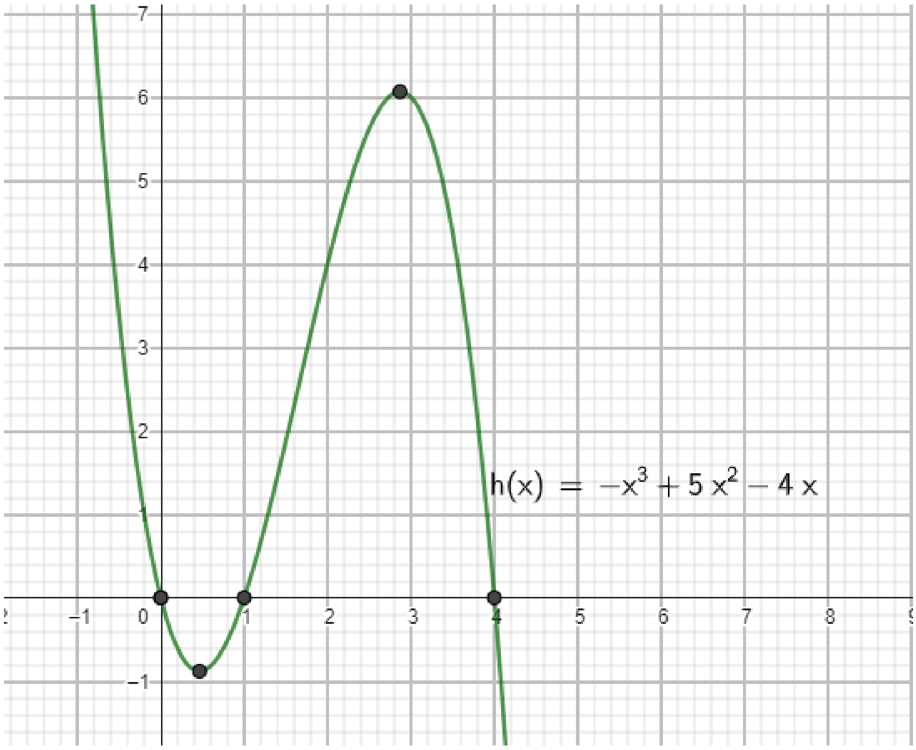
Toppunkt: $(2{,}87\,,\,6.06)$

(observerer fra y-verdien av ekstremalpunktene at hvilke er topp eller punpunktet)

d) Finn den momentane vekstfarten til funksjonen i punkt $(2\,,\,h(2))$.

$$h'(2) = -3 \cdot (2)^2 + 10 \cdot (2) - 4 = -12 + 20 - 4 = 4$$

e) Skisser grafen til funksjonen $h(x)$ i et koordinatsystem.



.

Oppgave 4) (2+2+6+3+2+2) 17 %

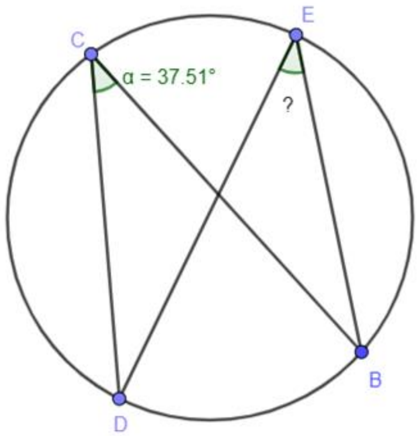
a) Hva er et geometrisk sted?

Et geometrisk sted er en samling punkter som oppfyller ett eller flere bestemte krav. Alternativt kan man si at alle punkter som ligger på et bestemt sted i forhold til ett eller flere punkter eller linjer, kalles et geometrisk sted.

b) Ola merker av et linjestykke på AB = 5 cm. Han konstruerer det geometriske stedet for alle punktene som ligger like langt fra A som fra B. Hva kalles dette geometriske stedet

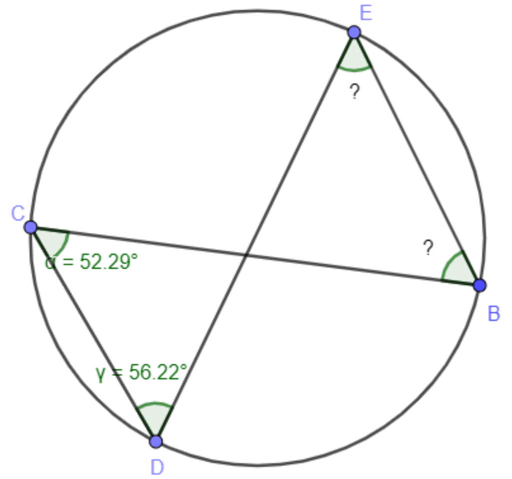
Midtnormalen.

c) Bruk setningen om periferivinkler og sentralvinkler til å finne de ukjente vinklene i figurene under.

<table>
<tr><th>i) Finn vinkel E</th><th>ii) Finn Vinklene B og E</th></tr>
<tr><td>

Vinkel E og Vinkel C er periferivinkler og spenner over samme

bue (DB) derfor:

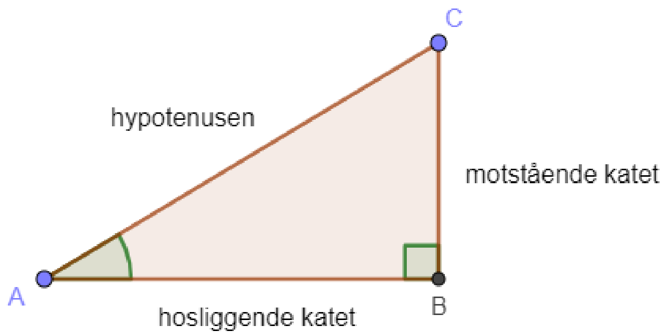
$\angle E = \angle C = 37{,}51^{\circ}$</td><td>

Vinkel B og Vinkel E er periferivinkler og spenner over samme bue (DB) derfor:
$\angle E = \angle C = 52{,}29^{\circ} \approx 52{,}3^{\circ}$

Tilsvarende er Vinkel D og Vinkel B er like

Fordi de spenner over samme bue (CE)
$\angle D = \angle B = 56.2^{\circ}$</td></tr>
</table>

d) Ta utgangspunkt i en rettvinklet trekant og definere begrepene sinus, cosinus og tangens for A i figuren under.



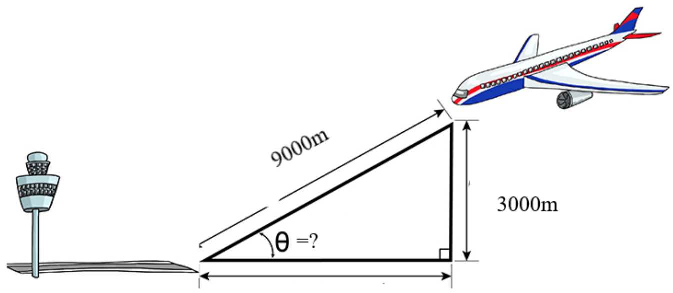
Sinus, cosinus og tangens er definert slik:

$$\sin(A) = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\cos(A) = \frac{\text{hosliggende katet}}{\text{hypotenusen}}$$

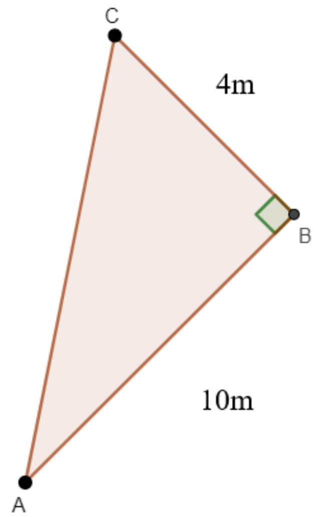
$$\tan(A) = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hosliggende katet}}$$

e) En lufttrafikkontroller mottar beskjed fra en pilot som ønsker å foreta en landing. Piloten informerer at hun for øyeblikket befinner seg på en høyde av 3000 meter og ønsker veiledning angående den gunstige nedstigningsvinkelen. Lufttrafikkontrolleren observerer på radaren at flyet befinner seg 9000 meter unna rullebanen. Hva blir den nedstigningsvinkelen? Altså Θ i figur under.



$$\sin(\theta) = \frac{3000}{9000} = \frac{1}{3}$$
$$\angle\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 19.47^\circ$$

f) Gitt trekanten ABC (se figur under). Finn de ukjente vinklene og den ukjente siden.



Vinkel A:

$$\angle A = \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = 21.8^\circ$$

Dermed $\angle C = 90^\circ - 21.8^\circ = 68.2^\circ$.
Alternativ: $\angle C = \tan^{-1}(2.5) = 68.2^\circ$

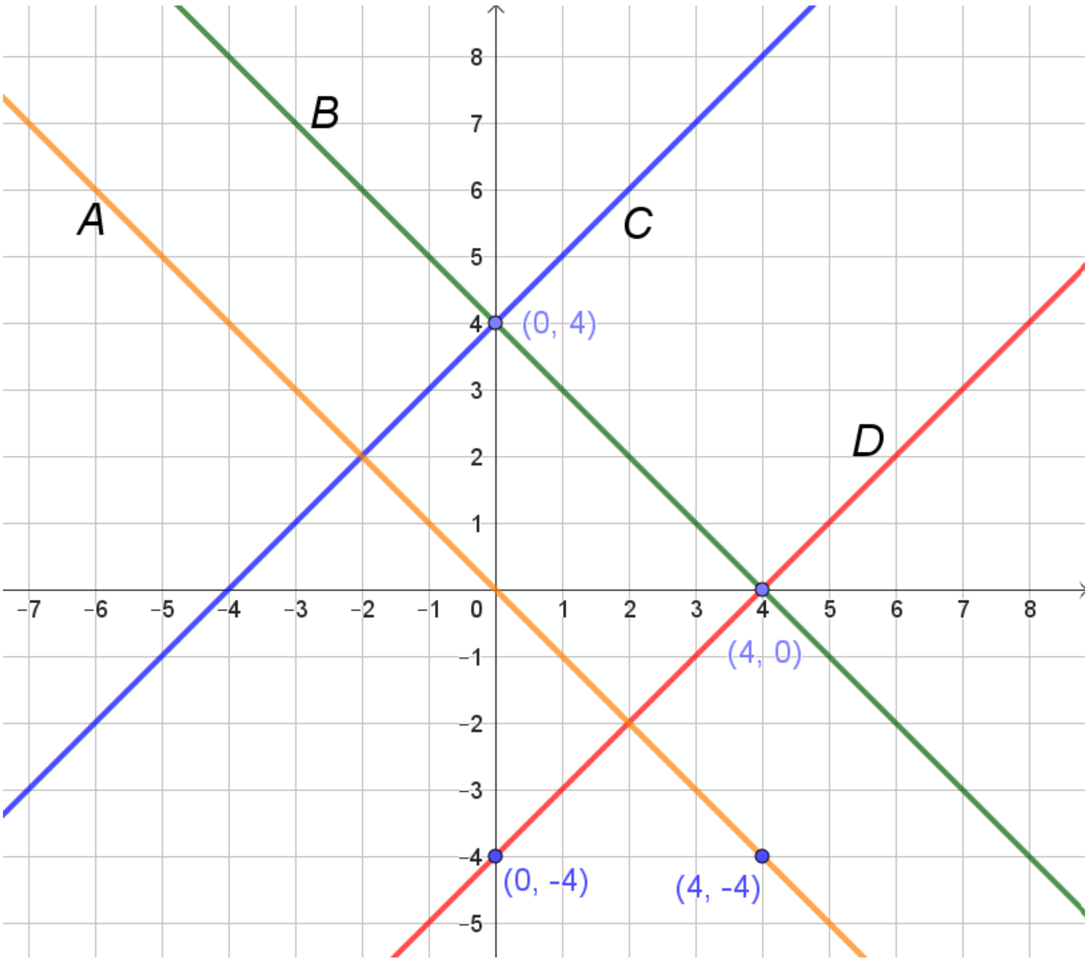
for den ukjente siden kan bruke Pytagoras eller bruke trigonometri.
$$AC = \sqrt{10^2 + 4^2} = 10.77$$

Oppgave 5) (8+8) 16 %

a) **Diagnostisk undervisning.**

Gitt $y + x - 4 = 0$

Elevene hadde tegnet sammenhengen mellom x og y i koordinatsystemet på ulike måter. Her er de fire vanligste forslagene.



I. Hvilket forslag er rett tegnet av linje A, B, C eller D?
II. Forklar hvordan du tenkte.
III. Ta for deg en av de andre linjene. Hvilken misoppfatning kan ligge bak dette forslaget?

I) $y + x - 4 = 0$ er grafisk fremstilt som linje B.

II) Studentene kan forklare det ved f.eks:

1) Skrive sammenhengen som $y = -x + 4$.
Da ser de skjæringspunkt med y-aksen i (0, 4) og stigningstall -1.

2) De kan lage verditabell.
3) De kan finne punkter som ikke passer inn i sammenhengen.

III) Linje A: Elevene tror at linja går igjennom origo. Uttrykket = 0, og de første lineære funksjonene de møter går gjerne gjennom origo, som f.eks y = x, y = 2x osv

Linje C: Linja krysser y-aksen i 4 og tallet foran x er 1, dvs at stigningstallet er 1.

Linje D: Konstant leddet er -4 og tallet foran x er 1.

b) Problemløsing

Løs oppgaven under ved og vis hvordan du kan bruke Polyas strategier.

1 Forstå problemet, 2) Lag en plan, 3) Utfør planen og 4) Kontroller og reflekterer.

En rektangulær hage har et areal på 96 kvadratmeter. Lengden er 4 meter mer enn bredden. Finn lengden og bredden på hagen.

.

I: Det skal være greit å forstå problemet.

II: En kan gå frem med oppgaven på flere måter: lage tegning,

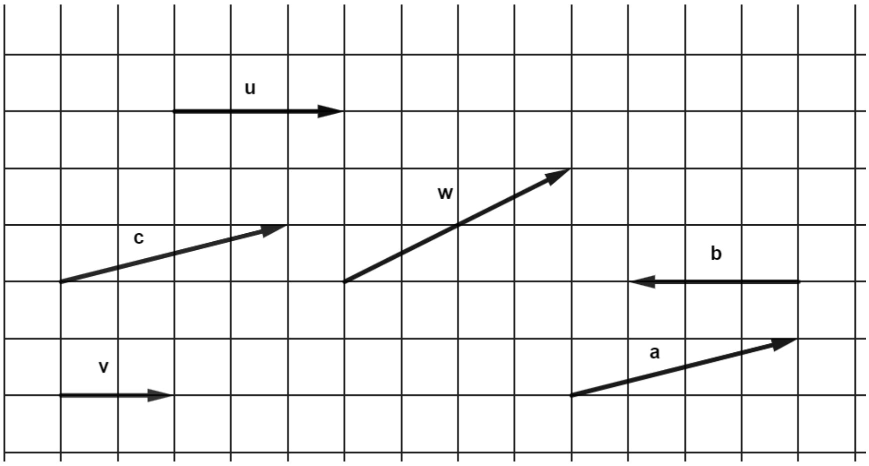
som å løse likning, som produkt av to tall skal bli 96, gjette å sjekke osv.

III: planene blir gjennomført

IV: Kontroller og reflekterer over resultat. Det viser seg at riktig var blir: bredden= 8m og lengden

Oppgave 6) (3+3+3+6) 15 %

a) Gitt koordinatsystemet og vektorene på figuren nedenfor.
Du ser for eksempel at vektoren $\vec{w}$ har koordinatene [4, 2].



i) Skriv alle vektorene på koordinatform

$\vec{w} = [4\,,2]$, $\vec{u} = [3\,,0]$, $\vec{c} = [4\,,1]$, $\vec{v} = [2\,,0]$

$\vec{b} = [-3\,,0]$, $\vec{a} = [4\,,1]$

ii) Hvilke vektorer har samme lengde? (vis ved regning/begrunn)

Vi kan se grafisk som her eller ved regning. To vilkårlig vektorer $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{CD}$ har samme lengde når $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$.

I dette tilfelle: ($\vec{c}$ og $\vec{a}$) og ($\vec{u}$ og $\vec{b}$) har samme lengde

iii) Hvilke vektorer er parallelle ? (vis ved regning/begrunn)

Vi kan se grafisk som her eller ved regning.

For eksempel kan dette avgjøres ved å se på forholdet mellom x- og y-komponentene til den ene vektoren, og sammenligne det med den andre vektoren. Dersom forholdet er likeså vektorene er parallelle.

I dette tilfelle: ($\vec{c}$ og $\vec{a}$) og ($\vec{u}$ og $\vec{b}$) er parallelle.

b) Finn summen $2\vec{a}+\vec{b}$ og differansen $2\vec{a}-3\vec{b}$ når $\vec{a}=[1,-3]$, $\vec{b}=[3,2]$.

$$2\vec{a}+\vec{b}=2[1,-3]+[3,2]=[2,-6]+[3,2]=[5,-4]$$

$$2\vec{a}-3\vec{b}=2[1,-3]-3[3,2]=[2,-6]-[9,6]=[-7,-12]$$

c) Emma var i ferd med å løse vektoroppgaver fra tavlen i klasserommet. Hun la merke til vektor $\vec{u}=[2,1]$, men da hun kom til vektor $\vec{w}$, la hun merke til at y-komponenten manglet. Der står vektor $\vec{u}=[2,1]$ og $\vec{w}=[1,\ ]$. Det viser seg at hun har glemt å skrive y-komponenten til vektor $\vec{w}$.
Hun husket at vektorene stod vinkelrett på hverandre, men var usikker på hvordan hun skulle finne den manglende y-komponenten til vektor $\vec{w}$. Kan du hjelpe Emma med å finne denne verdien?

To vektorer står normal på hverandre dersom skalarprodukt av vektorene er lik null.

Altså: $\vec{u}\cdot\vec{w}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}\perp\vec{w}$

$$\begin{cases}\vec{u}=[2,1]\\ \vec{w}=[1,y]\end{cases} \rightarrow \quad [2,1]\cdot[1,y]=0 \rightarrow 2+y=0 \rightarrow y=-2$$

y-komponenten til vektor $\vec{w}$ er -2.

d) Gitt vektorene $\vec{c}=[5,2]$ og $\vec{e}=[3,3]$.

i) Finn skalarproduktet av vektorene.
$[5,2]\cdot[3,3]=15+6=21$
ii) Finn lengden av vektorene.

$$|\vec{c}|=|[5,2]|=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$$

$$|\vec{e}|=|[3,3]|=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$$

iii) Bestem vinkelen mellom vektorene.

$$\vec{c} \cdot \vec{e} = |\vec{c}| \cdot |\vec{e}| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{c} \cdot \vec{e}}{|\vec{c}| \cdot |\vec{e}|} = \frac{21}{\sqrt{29} \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{58}}$$

$$\angle\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{58}}\right) \approx 23.2$$