SENSORVEILEDNING

Emnekode:	LMUMAT10420
Emnenavn:	Algebra, funksjoner, geometri og måling II (5-10)
Eksamensform:	Individuelt, skriftlig eksamen
Dato:	14. mai 2024 9:00-15:00
Faglærer(e):	Natalia Bredrup (emnesansvarlig) Ali Reza Ludvigsen
Eventuelt: Sensorveiledningen består av 17 sider	

Innhold

Denne sensorveiledningen inneholder:

1. **Vurderingskriterier for den enkelte karakter**
2. **Viktige elementer for vurderingen**
3. **Oppgavene med stikkordsmessig løsningsforslag**

1. Vurderingskriterier for den enkelte karakter

	Generelle kriterier Kilde: https://www.uio.no/studier/eksamen/karakterskala/fagspesifikk-karakterbeskrivelse/mn-math.html#skriftlig	**Prosent av besvarelsen som kan indikere karakter**
A	**Fremragende** prestasjon der kandidaten har løst problemer som krever fantasi og innsikt. Besvarelsen viser at kandidaten fullt ut behersker både de begrepsmessige, regnetekniske og anvendelsesmessige delene av emnet. Fremstillingen er klar og presis med korrekt bruk av notasjon og fagterminologi. Noen få mindre feil eller blanke punkter kan tillates.	[92% - 100 %]
B	**Meget god** prestasjon der kandidaten har løst problemer som går utover det rutinemessige, og som krever god oversikt over emnet. Besvarelsen viser meget god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset. Fremstillingen er klar og med stort sett riktig bruk av terminologi og notasjon.	[77% - 92 %)
C	**God** Gjennomsnittlig prestasjon der kandidaten har løst oppgaver av middels vanskelighetsgrad fra de fleste deler av kurset. Besvarelsen viser god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har ikke i særlig grad klart å anvende sine ferdigheter og kunnskaper på oppgaver som går ut over det rutinemessige. Fremstillingen er grei å forstå, men kan ha en del formelle mangler.	[58% - 77%)
D	**Nokså god** Prestasjon under gjennomsnittet der kandidaten har løst eller kommet et stykke på vei med oppgaver fra flere sentrale deler av kurset. Besvarelsen viser kjennskap til de viktigste teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har vanskelig for å komme helt i mål selv på rutinepregede oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men kan ha en god del formelle mangler.	[46 % - 58%)
E	**Tilstrekkelig** Prestasjon som tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Besvarelsen viser at kandidaten har kjennskap til begreper, teknikker og anvendelser fra flere deler av kurset, og at han/hun til en viss grad kan bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men røper klare feil og misforståelser.	[40 % - 46%)
F	**Ikke bestått** Prestasjon som ikke tilfredsstiller minimumskravene. Besvarelsen viser at kandidaten har manglende kjennskap til sentrale teknikker, begreper og anvendelser, eller manglende evne til å bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Besvarelser som bare viser beherskelse av en avgrenset del av emnet, vil normalt havne i denne kategorien.	[0 % - 40%)

Universitets – og høgskolerådet har utformet disse generelle, kvalitative beskrivelsen av de ulike karakterene:

symbol	betegnelse	generell, ikke fagspesifikk beskrivelse av vurderingskriterier
A	fremragende	Fremragende prestasjon som klart utmerker seg. Kandidaten viser svært god vurderingsevne og stor grad av selvstendighet.
B	meget god	Meget god prestasjon. Kandidaten viser meget god vurderingsevne og selvstendighet.
C	god	Jevnt god prestasjon som er tilfredsstillende på de fleste områder. Kandidaten viser god vurderingsevne og selvstendighet på de viktigste områdene.
D	nokså god	En akseptabel prestasjon med noen vesentlige mangler. Kandidaten viser en viss grad av vurderingsevne og selvstendighet.
E	tilstrekkelig	Prestasjonen tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Kandidaten viser liten vurderingsevne og selvstendighet.
F	ikke bestått	Prestasjon som ikke tilfredsstiller de faglige minimumskravene. Kandidaten viser både manglende vurderingsevne og selvstendighet.

2. Viktige elementer for vurderingen

Nedenfor finnes forslag på løsninger. Det vil selvsagt være flere andre fremgangsmåter som kan gi full uttelling så her må det vurderes i hvert enkelt tilfelle. I gjennomgangen nedenfor er det indikert en maksimumspoengsum for hver av deloppgavene, og i noen grad utdypet hvordan poeng skal settes utover dette. **Det er imidlertid av stor betydning med en helhetlig vurdering.**

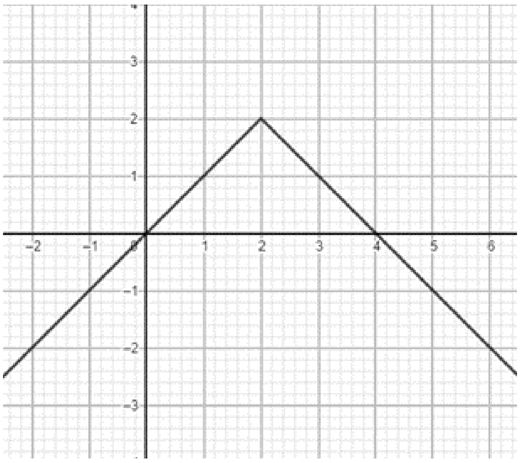
Oppgave 1 12% (2 + 2 + 4 + 4)

a) Hva er den matematiske definisjonen av begrepet "funksjon"?

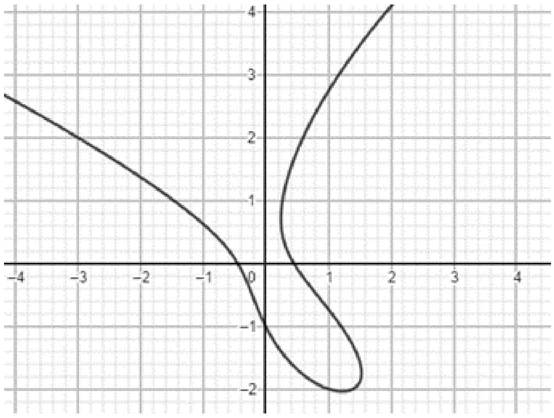
Det viktigste er studenten viser i formuleringen at *en regel som tildeler/tilordner nøyaktig ett element i en mengde A til hvert element i en annen mengde B.*

b) Hvilken eller hvilke av grafene nedenfor representerer en funksjon? Begrunn svaret.

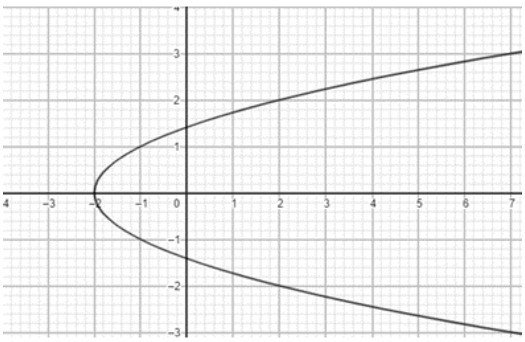
1)



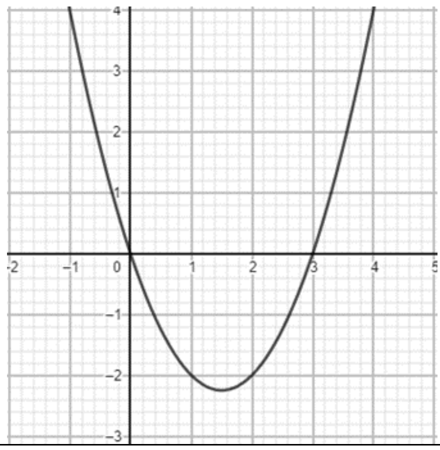
2)



3)



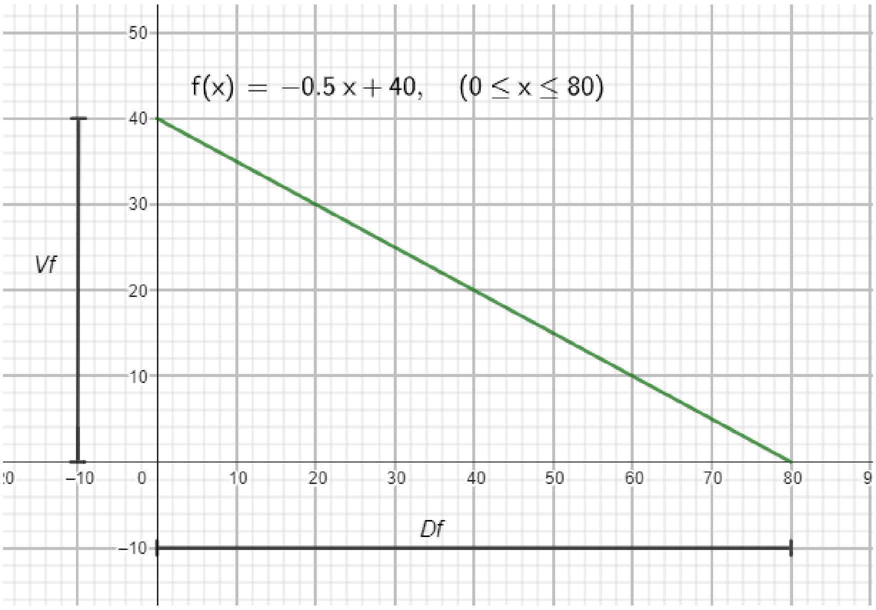
4)



Grafene 1) og 4) er funksjons graf fordi en *x* har kun en *y* verdi, i motsetning til 2) og 3), man kan ta vertikal linje test og se at disse grafene strider mot funksjons definisjon.

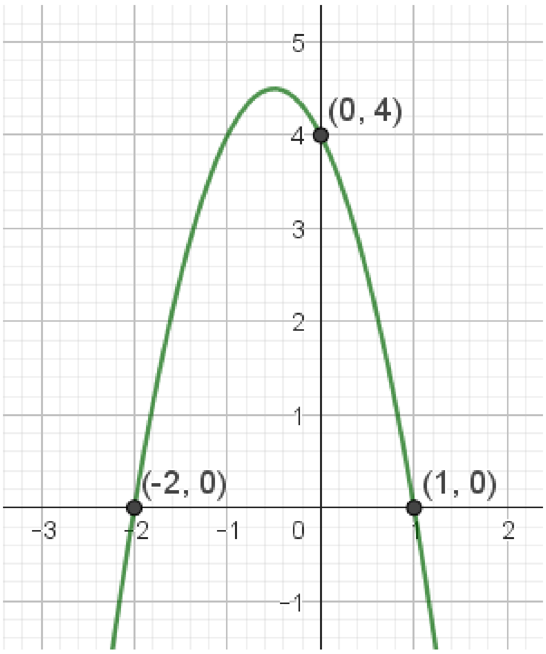
c) En bil har 40 liter stor tank. Bilen starter å kjøre med full tank, og gjennomsnittlig forbruk er 0,5 liter pr mil. Hvor langt kan man komme med en full tank? Skriv et funksjonsuttrykk som beskriver situasjonen og tegn funksjonsgraf. Hva blir definisjons- og verdimengde?

Man klarer å kjøre 40 : 0,5 = 80 mil med full tank. Hvis man uttrykker drivstoff mengde som funksjon av tilbakelagt avstand, blir det $f(x) = 40 - 0{,}5x$ der x er antall mil bilen har kjørt, og $f(x)$ er antall liter som er igjen i tanken. Definisjonsmengde er $D_f = [0, 80]$ viser mulig avstand bilen kan kjøre med en full tank, og verdimengde er $V_f = [0, 40]$ viser hvor mye drivstoff kan det være i tanken.



Viktig at man velger fornuftige enheter langs begge aksene, og at grafen reflekterer gitt praktisk situasjon, at den ikke går utover definisjons- og verdiområdet.

d) Grafen til funksjon $f(x)$ skjærer aksene i punktene som er visst på bildet. Skriv funksjonsuttrykk på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$



Bruker nullpunkts metoden:

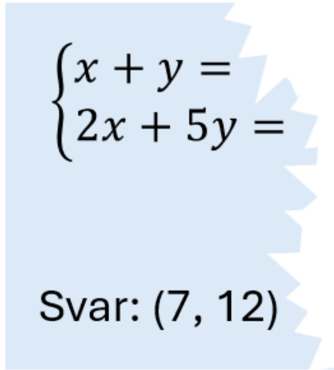
$$a(x - x_1)(x - x_2) = a(x + 2)(x - 1) = a(x^2 - x + 2x - 2) = a(x^2 + x - 2)$$

Finner a ved å sette verdier (0, 4): $4 = a \cdot (-2)$ $\Leftrightarrow$ $a = -2$

Skriver funksjons uttrykket: $f(x) = -2(x^2 + x - 2) = -2x^2 - 2x + 4$

Oppgave 2 12% (3 + 3 + 3 + 3)

En lærer har skrevet ned en tekst oppgave som skulle løses ved hjelp av et lineært ligningssystem. Han tenkte å gi den til sine elever, men var så uheldig at katten hans Simba har spist en stor del av notatene hans. Kun venstre side av systemet og ønsket svar som ble igjen, se bildet.



$$\begin{cases} x + y = \\ 2x + 5y = \end{cases}$$

Svar: (7, 12)

a) Hjelp læreren å gjenopprette systemet, han mener det skulle være tall på høyre side.

Man skal sette inn verdiene (7, 12) og beregner tall for begge likninger: $7 + 12 = 19$ og $2 \cdot 7 + 5 \cdot 12 = 14 + 60 = 74$.
Skriver systemet slik det skal være:

$$\begin{cases} x + y = 19 \\ 2x + 5y = 74 \end{cases}$$

b) Hjelp læreren å lage en ny tekstoppgave som passer med systemet.

Det kan være en populær oppgave med lysholdere/lystakere og antall lys. F.eks. det er noen lystakere med 2 arm, og noen med 5 arm. Til sammen er det 19 lystakere og 74 lys. Hvor mange av hver type lystakere er det? (de hadde «lystakere» oppgave i undervisningen, så kan godt hende fleste bruker den konteksten). Evt det kan være ulike passende kontekst, vurderes på skjønn. Viktig at problemstilling / spørsmål er formulert i oppgaven.

c) Vis hvordan oppgaven kan løses uten algebra.

Kan løses ved hjelp av en tabell, systematisk eller usystematisk der de prøver seg frem, eller ved å resonnere / tegne løsningen. F.eks. alle 19 lystakere skal ha mist 2 lys på seg, det blir 38 til sammen. Det er 74 – 38 = 36 lys til overs. Fordeler på 3 lys for å ha på 5-ermede lystakere, og det blir 12 lystakere med 5 ermer, og dermed 19 – 12 = 7 lystakere med 2 ermer. Alle nevnte løsninger er like mye vektet.

d) Vis hvordan oppgaven kan løses algebraisk.

Innsetnings- eller addisjonsmetoden har samme vekt.

F.eks. addisjonsmetoden: multipliserer øverste likning med (-2) og legger sammen med den andre:

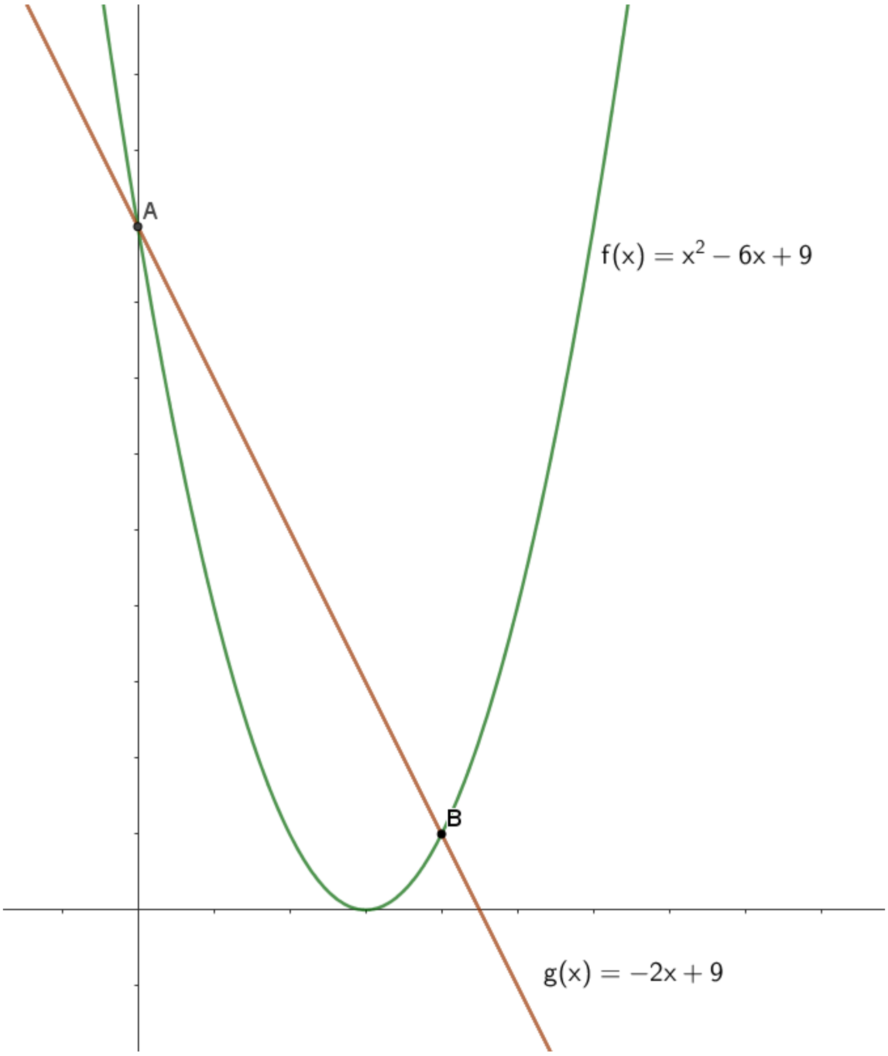
$$\begin{cases} -2x - 2y = -38 \\ 2x + 5y = 74 \end{cases} \quad => \quad 3y = 36 \quad \Leftrightarrow \quad y = 12$$

Finner x ved å sette $y = 12$ i den første likningen: $x + 12 = 19 \quad \Leftrightarrow \quad x = 7$

Viktig å forklare at x står for 2ermede og y for 5ermede lystakere, og tolke resultatet og gi svaret.

Oppgave 3 14% (3 + 4 + 2 + 3 + 2)

Funksjonsuttrykk til grafene er $f(x) = x^2 - 6x + 9$ og $g(x) = -2x + 9$, se bildet.



a) Finn skjæringspunktene mellom grafene ved regning.

Setter opp en likning $f(x) = g(x)$ og finner x, deretter finner funksjonsverdi:

$$x^2 - 6x + 9 = -2x + 9$$

$$x^2 - 6x + 2x = 0$$

$$x^2 - 4x = 0$$

Likningen kan løses lett ved å bruke produktregelen, ellers kan velge metoden selv. Røttene skal være $x_1 = 0, x_2 = 4$ og funksjonsverdier er $g(x_1) = 9, g(x_2) = 1$

Skjæringspunktene har koordinater (0, 9) og (4, 1).

Avlesning gir max 1 poeng.

b) Bestem arealet til området avgrenset av grafene til $f(x)$ og $g(x)$.

Setter opp bestemt integral med grenser 0 og 4 og finner arealet ved regning:

$$\int_0^4 (g-f)dx = \int_0^4 (-2x+9-x^2+6x-9)dx = \int_0^4 (4x-x^2)dx = \left[4\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}\cdot x^3\right]_0^4$$

$$= \left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 2\cdot 4^2-\frac{4^3}{3} = 32-\frac{64}{3} = \frac{96-64}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$

c) Løs ulikheten $x^2-6x+9>9-2x$ grafisk.

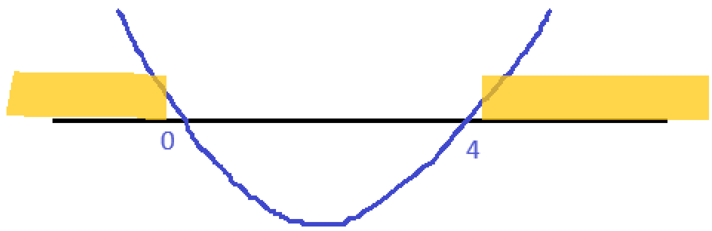
Her skal man tolke ulikheten grafisk og finne x verdier der $f(x)>g(x)$, altså grafen til f ligger over grafen til g. Svaret er $x \in (\leftarrow, 0) \cup (4, \rightarrow)$

d) Løs ulikheten $x^2-6x+9>9-2x$ algebraisk.

Her kan man bruke fortegnsskjema eller nullpunkter og resonnement:

$x^2-6x+9-0+2x>0 \quad \Leftrightarrow \qquad x^2-4x>0$

Nullpunktene er 0 og 4. Uttrykket viser til at grafen skal være en «glad» parabel med grener opp, og de skjærer x-aksen i punktene 0 og 4. Grener står over x-aksen fram til $x=0$ og etter $x=4$, tolker svaret: $x \in (\leftarrow, 0) \cup (4, \rightarrow)$.



e) Pål løser ulikheten slik:

$$x^2-6x+9>9-2x$$
$$x^2>9-2x+6x-9$$
$$x^2>4x$$
$$x>4$$

Gi tilbakemelding til Pål.

Pål deler begge sider på x uten å ta hensyn til fortegn og at ulikheten kan snu hvis x er negativ. Man kan be Pål om å teste f.eks. $x=-1$ og skape kognitiv konflikt i hans tankemodell.

Oppgave 4 12% (4 + 4 + 4)

a) Hva syns du om Lise sin argumentasjon? Skriv et generelt bevis som gjelder for alle mulige påfølgende oddetall.

Lise sin argumentasjon har svak holdbarhet, det er ikke nok med to eller flere eksempler for at påstanden skal gjelde alltid. Her må man føre generelt bevis for alle mulige påfølgende oddetall. Hvis vi kaller de $(2k - 1)$ og $(2k + 1)$, kan bevise at $(2k + 1)^2 - (2k - 1)^2$ er alltid delelig med 8:

$4k^2 + 4k + 1 - (4k^2 - 4k + 1) = 8k$ der k er naturlig tall.

b) Hva blir konklusjon hvis du skal sjekke to påfølgende *partall*? Begrunn din antakelse algebraisk.

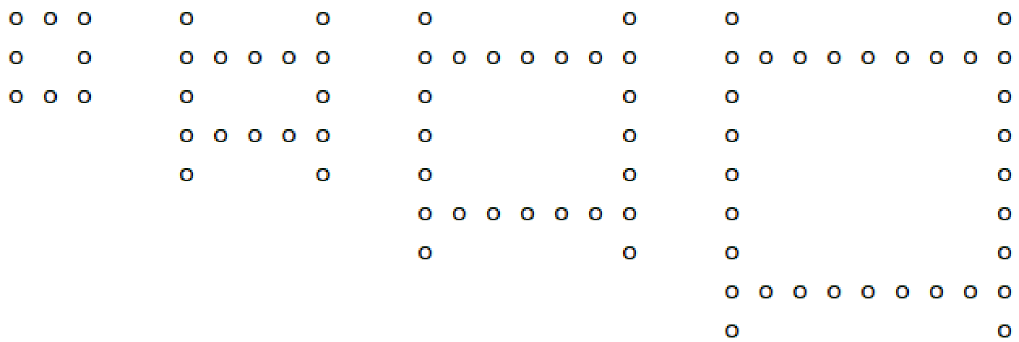
Det er greit at studenten prøver først ulike påfølgende partall og kommer med antakelse, ellers kan hoppe over det steget og løse algebraisk: la oss si at disse tallene er $2k$ og $(2k + 2)$, deres kvadrat differanse er:

$$(2k + 2)^2 - (2k)^2 = 4k^2 + 8k + 4 - 4k^2 = 8k + 4 = 4(2k + 1)$$

Det blir et tall som er alltid delelig med 4, men ikke med 8 fordi den andre faktoren $(2k + 1)$ er et oddetall.

c) Se på første fire figurtall. Lag figurtall nr 5 og nr 6. Jesper vil lage funksjonsmaskin som beregner antall kryss for en gitt figur nummer. Lag funksjonsutrykket til $F(n)$ der n er nummer til figurtall.

Hvis man er heldig så ser at figurtallene visualiserer situasjon i oppgave a), altså kvadrat differanse av to påfølgende oddetall.



$$F_1 = 3^2 - 1^2 = (2\cdot 1+1)^2 - (2\cdot 1-1)^2 = 8$$

$$F_2 = 5^2 - 3^2 = (2\cdot 2+1)^2 - (2\cdot 2-1)^2 = 16$$

$$F_3 = 7^2 - 5^2 = (2\cdot 3+1)^2 - (2\cdot 3-1)^2 = 24$$

$$F_4 = 9^2 - 7^2 = (2\cdot 4+1)^2 - (2\cdot 4-1)^2 = 32$$

$$F_5 = 11^2 - 9^2 = (2\cdot 5+1)^2 - (2\cdot 5-1)^2 = 40$$

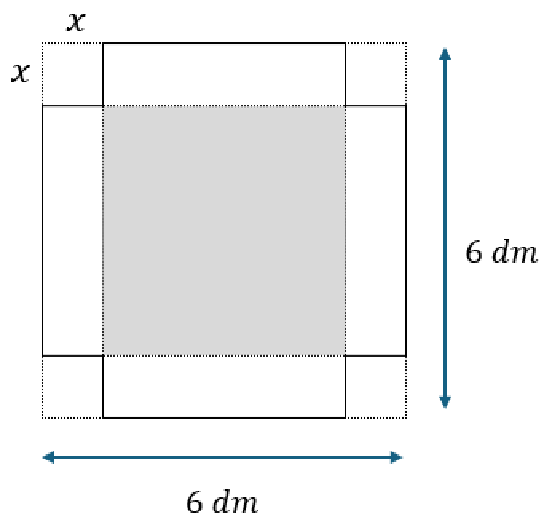
$$F_6 = 13^2 - 11^2 = (2\cdot 6+1)^2 - (2\cdot 6-1)^2 = 48$$

Generelt uttrykk, se oppgave a):

$$F_n = (2n+1)^2 - (2n-1)^2 = 8n$$

Oppgave 5 18% (2 + 2 + 2 + 4 + 3 + 3 + 2)

Du skal lage en papp eske ved å klippe bort like store kvadrater i hvert hjørne og brette sideflatene opp, se tegning.



a) Skriv funksjonsuttrykket $A(x)$ som viser arealet i bunnflata (det fargelagte området).

$$A(x) = (6-2x)^2 = 36 - 24x + 4x^2$$

b) Vis at volumet av esken kan uttrykkes med følgende funksjonsuttrykk:

$$V(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$$

Multipliserer arealet i bunn med høyden x:

$$V(x) = x \cdot A(x) = x \cdot (36 - 24x + 4x^2) = 36x - 24x^2 + 4x^3$$

Rydder opp i synkende rekkefølge for potenser:

$$V(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$$

c) Hva er definisjonsmengden i dette tilfelle.

Man kan ikke klippe mer enn halvparten av hver side, dvs. høyden må være mindre enn halvparten av 6 dm eller 3 dm. Og høyden må være større enn null for at det blir noe volum. Dermed definisjonsmengden er $D_V = (0, 3)$

d) Hvilken(-e) x verdi(-er) gir størst mulig volum? Hvor stort er dette volumet?

Her må man derivere for å finne ekstremalpunkter, og man skal forkaste disse x verdier som ligger utenfor definisjonsmengden:

$V'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12x^2 - 48x + 36 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0$

Finner røttene: $x_1 = 1, x_2 = 3$ → $x = 3$ gir volum lik 0, så er det kun $x = 1$ som er relevant og som gir størst volum: $V(1) = 4 - 24 + 36 = 16\ dm^3$

En annen matematisk funksjon er gitt:

$$f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x \qquad x \in \mathbb{R}$$

Hvis man er heldig så kan utnytte den praktiske situasjonen med esken for å besvare spørsmålene e, f) relativt enkelt:

e) Finn nullpunktene til f.

$f(x) = 0$ eller $x(6-2x)^2 = 0$ som gir nullpunkter: $x_1 = 0, x_2 = 3$

f) Finn ekstrempunktene til f.

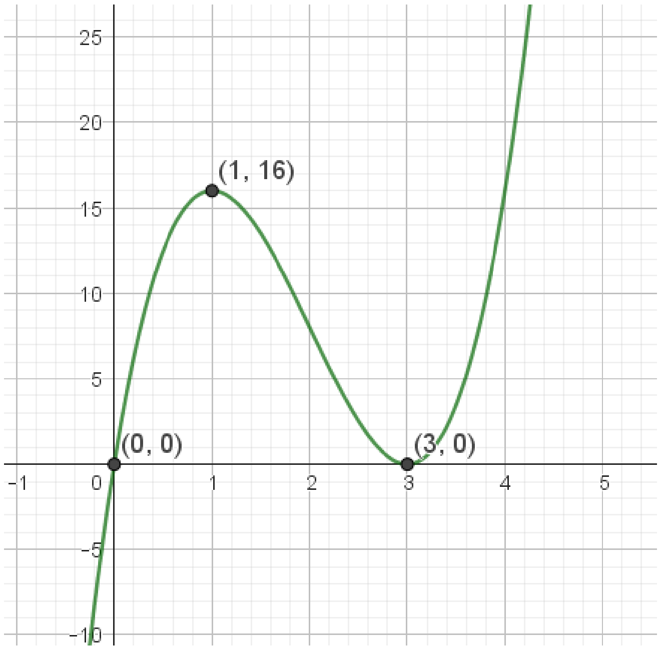
$f'(x) = 0$ eller $12x^2 - 48x + 36 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0$ som gir ekstremalpunkter der $x_1 = 1, x_2 = 3$. Finner funksjonsverdier:

$f(1) = 16$ → lokalt maksimum, se oppgave d)

$f(3) = 0$ → lokalt minimum, se oppgave c)

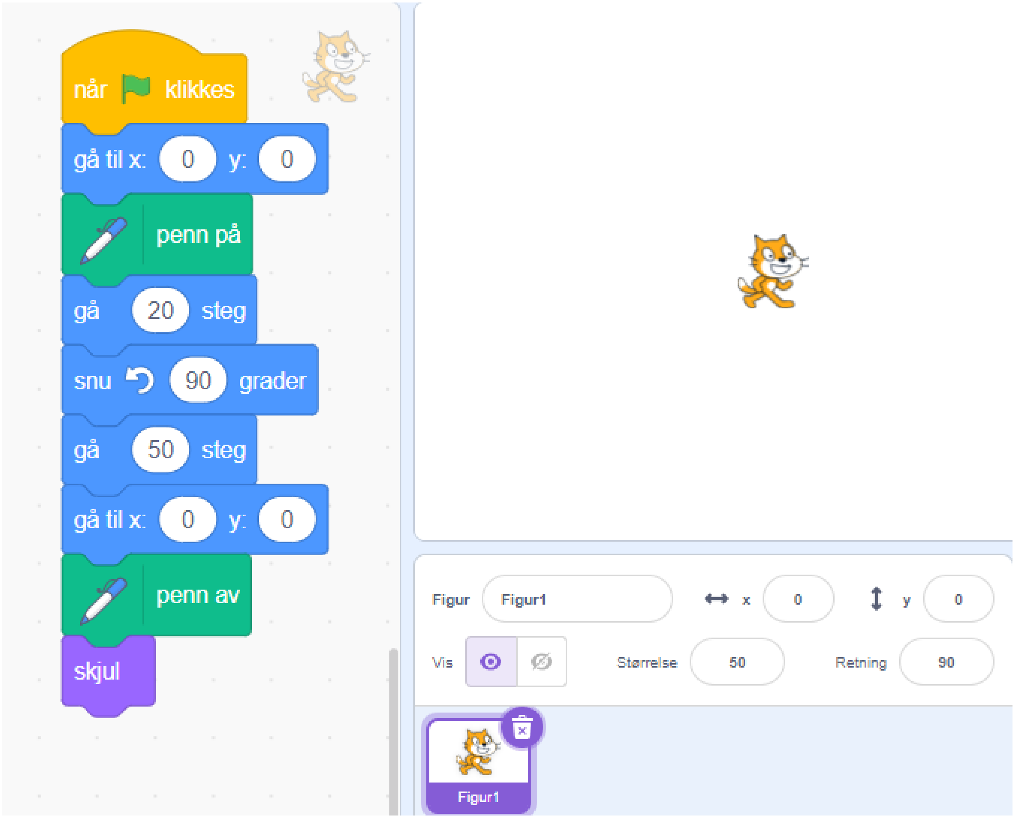
g) Lag en enkel graf skisse til f.

Viktig å vise nullpunktene og topp og bunnpunkt som er også nullpunkt for $f(x)$. Her er det ingen begrensning for definisjonsmengden, derfor skal man vise at grener går opp og ned mot uendelig.

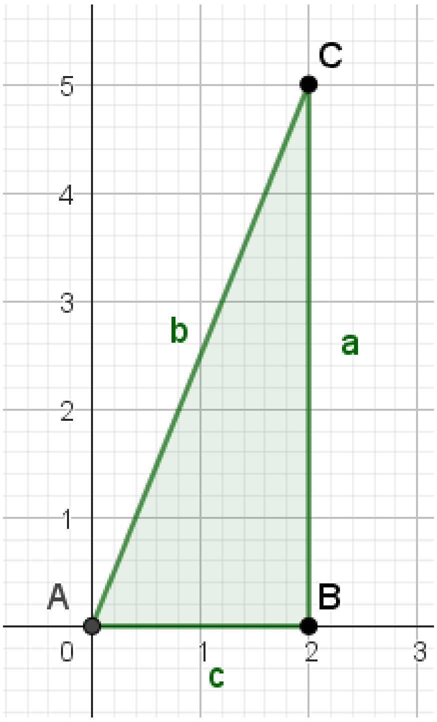


Oppgave 6 14 % (3 + 2 + 4 + 2 + 3)

a) Hvilken figur blir det når man starter programmet? Se utklipp. Tegn figuren på ruteark, velg gunstig målestokk.



Starter i Origo, går 20 steg (f.eks. 2 ruter) til høyre, snur 90° mot klokka og går 50 steg (5 ruter) oppover, går tilbake til Origo. Det skal dannes en rettvinklet trekant med kateter på 20 og 50 steg (2 og 5 ruter eller cm på papir). En annet enhet er tillatt så lenge figuren er formlik med originalen.



Man kan faktisk bruke samme tegning for å svare på oppgavene b, c).

b) Tegn en spiss vinkel u slik at $\tan u = 2{,}5$

Kan peke på tegningen at $\angle A = u$, den passer inn fordi $\tan u = \tan A = \frac{5}{2} = 2{,}5$.

Evt man kan tegne enhetssirkelen med tan aksen, og sette av korrekt tan verdi og tegne den spisse vinkelen (som ligger 1. kvadranten).

c) Finn $\sin u$ og $\cos u$, vis presise verdier.

Hvis man anvender samme tegning som i oppgaven a), kan finne *presise* verdier ved hjelp av Pytagoras for å finne lengden til AC: $AC = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$. Dermed

$$\sin u = \sin A = \frac{5}{\sqrt{29}} \qquad \cos u = \cos A = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

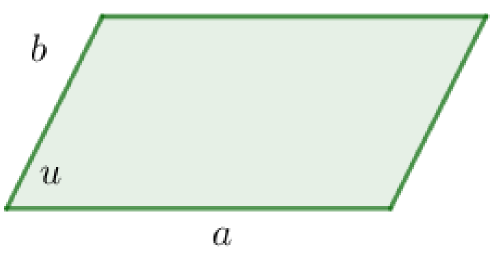
Det gis 2 poeng for hver av verdiene. Anvender man enhetssirkelen, og leser av ca verdier, er det max 1 p for hver.

d) Forklar med egne ord hva arealsetningen brukes til.

Kort sagt, gir den mulighet til å beregne areal til en vilkårlig trekant (uansett om den er spiss eller stump) så lengde vi kjenner til to sidelengder og sinus verdi til vinkelen mellom dem.

e) Et parallellogram har areal på 48 cm^2, og sidene som er 6 cm og 10 cm lange. Hvor store er vinkler i parallellogrammet? Avrund til hele grader.

Man kan resonnere at et parallellogram er satt sammen av to kongruente trekanter, og derfor man kan anvende samme arealsetning for et parallellogram $A = a \cdot b \cdot \sin u$, se tegning.



La oss si at $a = 10\ cm$, $b = 6\ cm$

Kan anvende areal setning «baklengs»:

$48 = 10 \cdot 6 \cdot \sin u$

$$\sin u = \frac{48}{60} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Finner vinkel størrelse ved hjelp av vedlegget eller kalkulator: $\arcsin 0{,}8 \approx 53°$.

Den stumpe må være $180° - 53° = 127°$

Evt man kan trekke høyde mot f.eks. $a = 10\ cm$ ifølge tegningen, og beregne den ved å bruke areal formel for et parallellogram «baklengs»: $A = g \cdot h$

$$h = \frac{A}{g} = \frac{A}{a} = \frac{48}{10} = 4{,}8$$

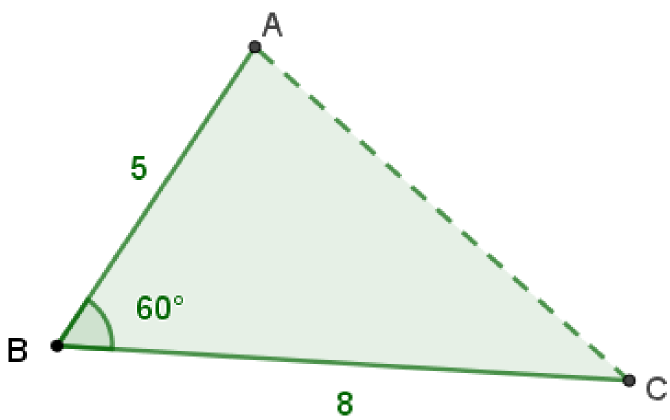
Deretter kan man beregne $\sin u = \frac{h}{b} = \frac{4{,}8}{6} = 0{,}8$ og løse deretter som visst tidligere.

Oppgave 7 18 % (3 + 3 + 2*3 + 2 + 4)

I en trekant er to av sidene 5 cm og 8 cm lange og vinkelen mellom dem er 60°.

a) Konstruer trekanten med passer og linjal.

Man bruker konstruksjon av en vinkel på 60° ved hjelp av likesidet trekant, og setter av 5 cm og 8 cm lange linjestykker på begge vinkelbein. Fullfører konstruksjon ved å tegne trekant.



b) Finn lengde til den ukjente sida.

Her er det mest naturlig å anvende cosinus setning for å finne lengde til AC:

$$AC^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60° = 64 + 25 - 80 \cdot \frac{1}{2} = 64 + 25 - 40 = 49$$

$$AC = \sqrt{49} = 7\ cm$$

c) Finn areal til trekanten, vis to ulike metoder:

i. Ved å bruke trigonometri

Anvender arealsetning her:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \sin 60° = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \approx 17{,}3\ cm^2$$

ii. Uten bruk av trigonometri

f.eks. Herons setning som de kan finne i vedlegget:

$$s = \frac{5 + 8 + 7}{2} = 10\ cm$$

$$A = \sqrt{10 \cdot (10 - 5) \cdot (10 - 8) \cdot (10 - 7)} = \sqrt{10 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{10 \cdot 10 \cdot 3} = 10\sqrt{3}\ cm^2$$

Alternativt kan man trekke høyde ned fra punktet A mot BC og argumentere at den deler trekanten ABC i to rettvinklede trekanter, og den ene er 30-60-90 trekant og katet som ligger mot vinkel på 30° er halvparten av hypotenusen AB, altså 2,5 cm lang. Høyden blir dermed $2{,}5\sqrt{3}\ cm$ hvis man anvender Pytagoras. Arealet finner man ved hjelp av

$$A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2{,}5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}\ cm^2$$

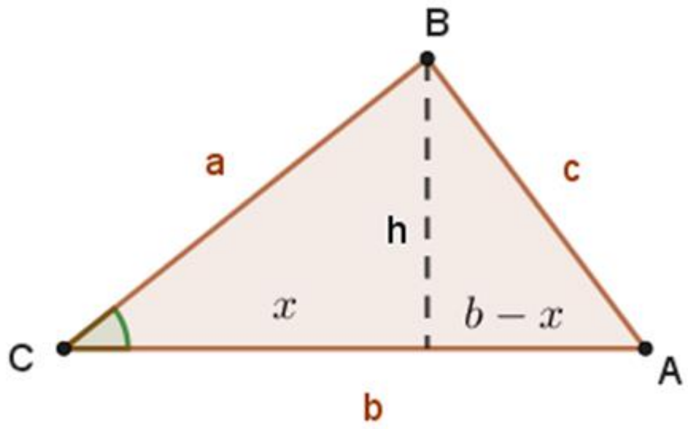
d) Pernille mener at trekanten «ser vinkelrett ut». Svar til Pernille, begrunn med relevante utregninger.

Man argumenterer ved hjelp av Pytagoras setningen, hvis sidene oppfyller den, så må det være en rettvinklet trekant:

$5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$, mens $8^2 = 64$

Ingen Pytagoras, trekanten ABC er ikke rettvinklet.

e) Forklaring til tegning: høyden h går fra punkt B mot sida b og deler den i to deler: kaller den ene for x, så den andre skal være $(b - x)$.



Vis utledning av cosinus setning med utgangspunkt i dette bildet.

Man kan anvende Pytagoras for begge trekantene, og uttrykke h^2:

$$h^2 = a^2 - x^2 = c^2 - (b - x)^2$$

Dermed fikk en setning som kan forenkles videre:

$$a^2 - x^2 = c^2 - (b^2 - 2bx + x^2)$$

$$a^2 - x^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2 + 2bx$$

$$a^2 + b^2 - 2bx = c^2$$

Neste steg å kvitte x, dette kan gjøres ved å uttrykke den ved hjelp av cos definisjon:

$$\cos C = \frac{x}{a} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = a \cdot \cos C$$

Sette inn i et og får cosinus setning: $\qquad a^2 + b^2 - 2b \cdot a \cdot \cos C = c^2$

Eller: $\qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$