

Høst 2021

Sensorveiledning

for Matematikk 101 –

Tall, måling, statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet (5 - 10)

LSV1MAT20-1 21H

- 1) Eksamensoppgaven med løsningsforslag side 2 til og med 13.
Den inneholder fasit og forslag eller kommentarer til ulike fremgangsmåter.

Generelt skal studentene begrunne alle sine svar.

En didaktisk oppgave i problemløsning er gitt. Det er viktig at elevene får frem sin forståelse fremfor om alle punktene er med.

- 2) Vurderingskriterer side 14 og 15.

Eksamen med løsningsforslag

Emnekode: LSV1MAT20-1 21H	LSV1MAT20-1 21H Tall, statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet (5-10)
Dato: 03.12.21	Eksamenstid: kl 9.00 til kl 15.00
Hjelpemidler: Kalkulator	Faglærere: Audun Rojahn Olafsen Ali Ludvigsen
Eksamensoppgaven: Oppgavesettet består av 6 sider inklusiv denne forsiden. Kontroller at oppgaven er komplett før du begynner å besvare spørsmålene. <i>Oppgavesettet består av 6 oppgaver. Alle oppgavene skal besvares. Vis utregning eller begrunn svarene.</i>	
Sensurdato: 03.01.2022	

Oppgave 1) De fire regneartene og brøk.

a) Regn ut.

$$i) \frac{5}{12} + \frac{3}{4} = \quad \quad \quad ii) \frac{5}{6} - \frac{2}{5} =$$

$$iii) \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{5} = \quad \quad \quad iv) \frac{5}{6} : \frac{1}{4} =$$

Løsning:

$$\frac{5}{12} + \frac{3}{4} = \frac{5}{12} + \frac{9}{12} = \frac{14}{12} = \underline{1 \frac{1}{6}}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{2}{5} = \frac{25}{30} - \frac{12}{30} = \frac{13}{30}$$

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{6} : \frac{1}{4} = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{1} = \frac{10}{3} = \underline{3 \frac{1}{3}}$$

b) Forklar eller bevis at

“Når to brøker divideres på hverandre, snur vi den andre brøken og multipliserer den med den første.”

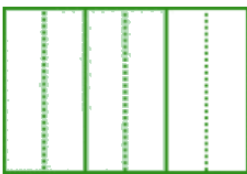
Løsning:

Et bevis er:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Andre gode forklaringer kan gis poeng

c) Hanne og Eli tenker å bruke denne figuren til å vise og forklare regnestykket $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} =$.



Løsning:



$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

d) Regn ut:

- i. 63 kr skal fordeles på 7 elever. Hvor mange kroner får de hver?
- ii. En vaffel koster 5 kr/vaffel. Hvor mange vafler kan du kjøpe for 35 kroner?
- iii. Hyllene i en bokhylle er 30 cm lange. Hvor mange hylleplater får jeg ut av en planke som er 240 cm lang?

- iv. Hvorfor er det viktig å regne med enheter?

Løsningsforslag:

- i) $63 \text{ kr} / 7 \text{ elever} = 9 \text{ kr /elev}$
- ii) $35 \text{ kr} / 5 \text{ kr/vaffel} = 7 \text{ vafler}$
- iii) $240 \text{ cm} / 30 \text{ cm/hylleplate} = 8 \text{ hylleplater}$

iv) Mange svarmuligheter.

De kan komme inn på noe liknende.

Elever har problemer med å bestemme regneart når det er situasjoner de ender opp med f.eks målingsdivisjon. Ved å bruke enheter i selve utregninga blir det enklere.

I oppgave iii) vil nok mange regne slik: $240 \text{ cm} / 30 \text{ cm} = 8$. De kan legge til en svarsetning om det blir 8 hylleplater og få rett.

Dersom de regner slik: $240 \text{ cm} / 30 \text{ cm} = 8 \text{ hylleplater}$, må det bli trekk fordi det mangler hylleplater i utregninga.

Studentene kan komme inn på delingsdivisjon og målingsdivisjon:

Det første kalles *delingsdivisjon*, de andre *målingsdivisjon*. Ved delingsdivisjon vet vi hvor mange det skal fordeles på. Svaret forteller hvor mange det blir til hver.

Ved målingsdivisjon sier divisor hvor lange hver hylle skal være. Svaret er hvor mange hylleplater det rekker til.

Hvor mange ganger kan 30 cm subtraheres fra 240 cm?

e) Maria har fordypet seg i egyptiske stambrøker, og forklarer følgende til elevene:

I egyptiske stambrøker må telleren være 1. To brøker kan ikke være like.

Dvs at $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ ikke kan brukes, mens $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ kan brukes.

Skriv disse brøkene som stambrøker og vis at det er riktig ved kontrollregning

- i) $\frac{2}{9}$
- ii) $\frac{2}{11}$

Løsningsforslag:

i) $\frac{2}{9} = \frac{4}{18} = \frac{1+3}{18} = \frac{1}{18} + \frac{3}{18} = \frac{1}{18} + \frac{1}{6}$

ii) Løses kanskje enklest ved likning:

$$\frac{2}{11} = x + \frac{1}{6}$$

$$x = \frac{12}{66} - \frac{11}{66} = \frac{1}{66}$$

$$\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$$

Oppgave 2) Lett blanding

a) Regn ut disse oppgavene på to forskjellige måter:

$$85 : 7,5 = \quad 345 + 456 = \quad 16 \cdot 2,5 =$$

Løsningsforslag:

Alt 1: $85 : 7,5 = 170 : 75 = (150 + 20) : 75 = 2 + \frac{20}{75} = 2 + \frac{4}{15}$

Alt 2: f.eks oppstilt

Alt 1: $345 + 456 = 300 + 40 + 5 + 400 + 50 + 6 = 700 + 90 + 11 = 801$

Alt 2: $345 + 456 = 345 + 5 + 451 = 350 + 450 + 1 = 801$

Alt 3: f.eks oppstilt

Alt 1: $16 \cdot 2,5 = 8 \cdot 2 \cdot 2,5 = 8 \cdot 5 = 40$

Alt 2: $16 \cdot 2,5 = 16 \cdot 2 + 16 \cdot 0,5 = 32 + 8 = 40$

b) En stor undersøkelse viste at kun 6% av elevene på 6.trinn svarte rett på denne likningen.

Hva gjør elevene feil og hvordan få elevene til å forstå hvordan det regnes ut?

$$6 + 2 \cdot \underline{\quad} = 24$$

Løsningsforslag: Vanlig feil er å regne slik $(6 + 2) \cdot \underline{\quad} = 24$ og da mangler faktoren 3.

Elevene kan kommutativ lov, dermed er $6 + 2 \cdot \underline{\quad} = 2 \cdot \underline{\quad} + 6$

Dermed kan elevene overbevises om at de må multiplisere før de adderer.

- c) Mariola har fått følgende oppgave:
Hva er 24% av 50?

Hun regner den slik:

$$24\% \cdot 50 = 50\% \cdot 24 = 0,5 \cdot 24 = 12$$

Forklar hvorfor denne metoden er rett!

Løsningsforslag: $24\% \cdot 50 = 24 \cdot \frac{1}{100} \cdot 50 = 50 \cdot \frac{1}{100} \cdot 24 = 50\% \cdot 24$

- d) Ali selger kakebokser med usannsynlige gode kaker.
1 boks kosta 80 kr. Ali ville at flere skulle få nyte kakene og satte ned prisen til 60 kr.
- 1) Hvor mange prosent satte han ned prisen?
 - 2) Etter hvert satte han opp prisen med den samme prosenten som i 1). Hva ble prisen da?
 - 3) Hvis du får forskjellige svar, begrunn hvorfor.

Løsningsforslag:

- 1) Prisen ble satt ned med 20 kr. 20 kr av 80 kr er
 $\frac{20}{80} \cdot 100\% = 25\%$
- 2) $60 \text{ kr} \cdot 25\% = (1200 \text{ kr} + 300 \text{ kr})/100 = 15 \text{ kr.}$
Prisen øker til 75 kr.
- 3) 25% av 80 er mer enn 25% av 60. Grunnet er forskjellig.

Oppgave 3) Tallforståelse.

- a) Skriv et tall større enn hundre som er:
- Delelig med 2.
 - Delelig med 3.
 - Partall og er delelig med 5.
 - Delelig med 12.

Løsningsforslag:

Delelig med 2: Eks 102, siste siffer må være delelig med 2.

Delelig med 3: Eks 102, tverrsummen må være delelig med 3.

Partall delelig med 5: Eks 110, sifferet på enerplassen må være 0.

Delelig med 12: Eks 204, tverrsummen må være delelig med 4 og de to siste sifrene må være delelig med 4.

- b) Vurder om dette er mulig. Begrunn svaret.
- Ett tall er oddetall og er delelig med 6.
 - Ett tall er primtall og er delelig med 7.
 - Alle partall er delelig med 4.
 - Alle tall som ender på 3, 6 og 9 er delelig med 3.

Løsningsforslag:

$6 = 2 \cdot 3$, derfor må tallet være delelig med 2. IKKE mulig.

Ja, 7 er delelig med 1 og 7. Det går fint.

Nei, eks tallet 22 er partall, men ikke delelig med 4.

Nei, eks 13, 16 og 19 er ikke delelig med 3.

- c) Skriv som brøk.

i) $1,25$ ii) $0,125$ iii) $0,454545..$

Løsningsforslag:

- i) Flere løsninger kan godtas:

$$1,25 = \frac{125}{100} \quad 1,25 = 1 \frac{25}{100} \quad 1,25 = \frac{5}{4} \quad 1,25 = 1 \frac{1}{4}$$

- ii) Flere løsninger kan godtas:

$$0,125 = \frac{125}{1000} \quad 0,125 = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned}
\text{iii)} \quad & 0,454545 = 0, \overline{45} \\
& x = 0, \overline{45} \quad \text{og} \quad 100x = 45, \overline{45} \\
& 100x - x = 45, \overline{45} - 0, \overline{45} \\
& 99x = 45 \\
& x = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}
\end{aligned}$$

d) Jan og Egil jubler etter en knallgod matematikk time, fordi de har lært å telle til 1000_{10} i to-tall systemet. Hvordan?

Løsning:

1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000

e) Eli og Henriette krangler. Læreren har satt en ekkel x , i stedet for tallet til basen, i dette regnestykket: $2344_x + 4534_x =$
 Eli mener at svaret på regnestykket 7878 .
 Henriette mener svaret er 11322_6
 Hvem har rett?

Løsningsforslag:

Eli har rett fordi:

$$2344_{10} + 4534_{10} = 7878_{10} = 7878$$

Henriette har rett fordi:

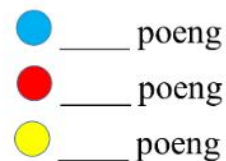
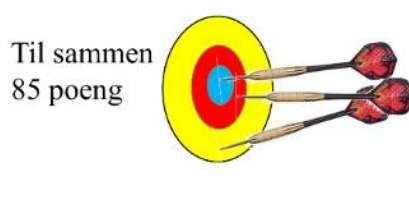
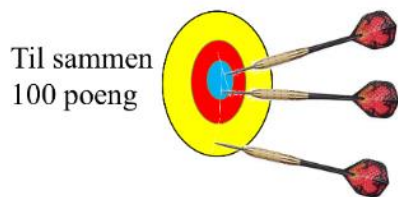
$$\begin{array}{r}
 \\
 \\
 \\
\hline
 \\
\hline

\end{array}$$

Oppgave 4) Problemløsning

En lærer løser oppgaven under og vurder hvordan elevene kan ha nytte av Polyas fire stadier i problemløsingen for å løse denne oppgaven.

- a) Forklar hvordan elevene kan ha nytte av Polyas fire stadier.
- b) Hvor mange poeng gir treffe på de ulike fargene?



To piler treffer sentrum (blå) en treffer i ytre ring (gul).

En pil treffer sentrum (blå), en i midtre ring (rød) og en treffer i ytre ring (gul).

Løsningsforslag:

Studentene må kjenne de fire fasene i problemløsning. Her kommer et eksempel.

- 1) **Forstå problemet** : Elevene bør skjønne oppgaven, f.eks at i pilkast gir treff i feltene nærme midten flere poeng enn de lenger fra sentrum. Vi trenger begge pilbrettene for å nærme oss en løsning. Brettet til høyre gir 15 poeng mindre enn det første samtidig som en av de to pilene som traff blink (blått felt) nå har truffet rødt felt. Dvs at rød gir 15 mindre poeng enn blå.
- 2) **Lag en plan**: Strategien er å gjette ulike kombinasjon som gir 100 poeng i første brett, deretter sjekke om det stemmer i brettet til høyre
- 3) **Gjennomfør planen**: Følgende kombinasjoner gir sum 100 poeng. To større tall og et mindre tall.

Muligheter:

Tester med hele femmere først:

$$50 + 50 + 0 = 100$$

$$45 + 45 + 10 = 100$$

$$40 + 40 + 20 = 100$$

$$35 + 35 + 30 = 100$$

Den fjerde går ikke ellers vil rød gi mindre poeng enn gul..

Tester om de virker på brettet til høyre:

$$50 + 35 + 0 = 85$$

$$45 + 30 + 10 = 85$$

$$40 + 25 + 20 = 85$$

4) Kontroller og reflekter:

Her er det tre mulige løsninger. Kanskje vil $50 + 50 + 0$ være mindre god da gul gir 0 poeng. De to andre muligheten virker gode.

Men, kan det være flere løsninger?

Oppgave 5) Statistikk

- 1) David kjøpte en ny TV for kr 5000 i 2010. Han har notert prisen til en brukt TV som vist i tabellen under.

2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
5000	3700	3300	2600	2000	1700	1400	1000	800	700

Hvilken type diagram bør han velge for å illustrere pris utviklingen? (begrunn svare ditt)

Løsningsforslag:

Det er to ulike diagrammer som peker seg ut.

Søylediagram og linjediagram. Dersom de går for linjediagram bør de argumentere med at verdien synker etter hvert som tiden går, antall timer brukt. Søylediagram viser tydelig hvordan utviklingen er fra år til år.

2)

Kurt kastet en trening 9.ganger. Hun fikk disse antallene øyen på terninger:

1, 1, 3, 6, 4, 2, 5, 5, 1

- a) Sett opp en tabell som viser frekvens og relativ frekvens.
b) Finn typetall, medianen og gjennomsnitt til datamaterialet over.

Løsningsforslag:

- a) Sett opp en tabell som viser frekvens og relativ frekvens.

x	f	r	r i %
1	3	0,3	33
2	1	0,1	11
3	1	0,1	11
4	1	0,1	11
5	2	0,2	22
6	1	0,1	11
	9		

- b) Finn typetall, median og gjennomsnitt.

Typetall = 1

Median: 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6 (nr: $(n+1)/2$)

Alt QED: $n/2$ også runde av til nærmeste tall.

Gjennomsnitt: $(1+1+1+2+3+4+5+5+6)/9 = 28/9 = 3,1$

Oppgave 6) Kombinatorikk og sannsynlighet.

- a) I kombinatorikken snakker vi om multiplikasjonsprinsippet. Forklar hva dette prinsippet går ut på.

Løsningsforslag:

Noe sånt: Et statistisk forsøk har r trinn og n_1 muligheter i første trinn, n_2 muligheter i andre trinn, ... og n_r muligheter i r 'te trinn, vil vi totalt ha $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$ muligheter

- b) Gjør rede for disse begrepene i sannsynlighetslæren:
Utfallsrom, hendelse, uniform sannsynlighetsmodell.

Løsningsforslag:

Utfallsrom

Den mengden som inneholder alle utfall et forsøk kan ha.

Det er fint om studentene gir eksempler. Som terningkast som har utfallsrommet (1, 2, 3, 4, 5, 6)

Hendelse

En eller flere utfall fra utfallsrommet. Eks å få partall på et terningkast (2, 4, 6).

Uniform sannsynlighetsmodell.

Alle utfall har like stor sannsynlighet.

c) Tabellen nedenfor viser en sannsynlighetsfordeling. Hva er galt med modellen?

	Utfall 1	Utfall 2	Utfall 3	Utfall 4
Sannsynlighet	0,2	-0,4	0,8	0,4

Løsningsforslag:

Summen av sannsynlighetene er 1, og det er bra, men sannsynlighet kan ikke oppgis med negativt

d) Ståle kan velge mellom 3 ulike par sko og 5 ulike slips. Hva blir antall kombinasjoner av sko og slips? Vis hvordan du tenker.

Løsning: *Ståle kan velge mellom 3 ulike par sko og 5 ulike slips. Hva blir antall kombinasjoner av sko og slips?*

$$3 * 5 = 15$$

e) Birger har 4 barnebarn og de stiller seg i kø for å få gi ham en klem. På hvor mange måter kan de stille seg i kø?

$$4! = 1 * 2 * 3 * 4 = 24$$

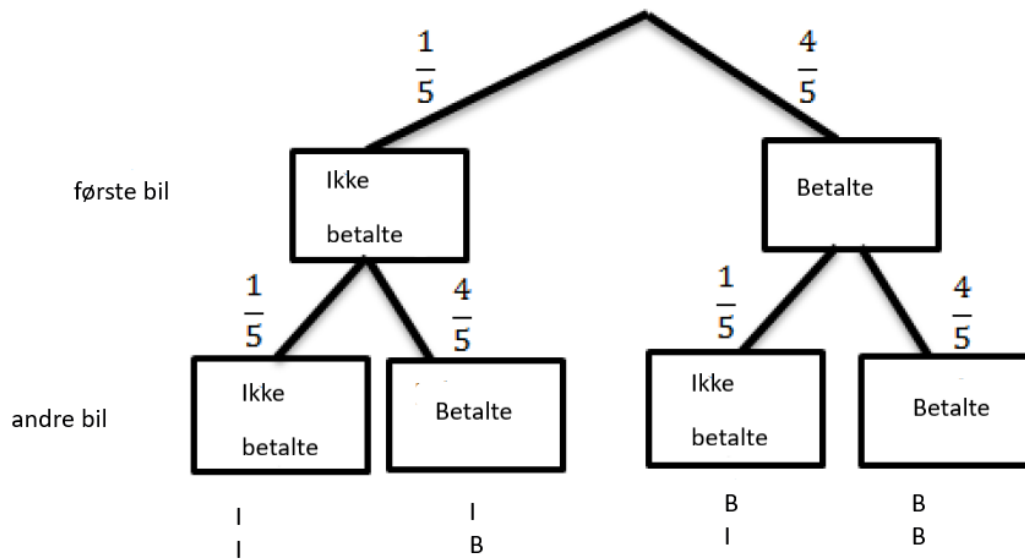
På en stor parkeringsplass antar vi at det er 80% sannsynlighet for at en tilfeldig valgt parkert bil betalte parkeringsavgiften.

Kontroller to tilfeldige parkerte biler.

Sette opp et valgtre (treddiagram) og svar på følgende spørsmål:

- f) Hva er sannsynligheten for at begge biler betalte parkeringsavgiften?
- g) Hva er sannsynligheten for at kun en av bilene har betalt parkeringsavgiften?

Løsningsforslag:



a) At begge har betalt parkeringsavgiften tilsvare alternativet BB. Altså:

$$p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \cdot p(B_2) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{25} = 64\% \text{ sannsynlighet}$$

b) Fra diagrammet ser vi at dette tilsvare IB og BI. Altså

$$p(B_1 \cap I_2) = p(B_1) \cdot p(I_2) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{25} = 16\% \text{ sannsynlighet}$$

$$p(I_1 \cap B_2) = p(I_1) \cdot p(B_2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{25} = 16\% \text{ sannsynlighet}$$

$$p(\text{kun en har betalt parkeringsavgiften}) = p(B_1 \cap I_2) + p(I_1 \cap B_2) = 32\% \text{ sannsynlighet}$$

Fagspesifikke karakterbeskrivelser:

Beskrivelsen under er veiledende i forhold til å sette karakter, derfor må besvarelsen også vurderes i sin helhet.

Symbol	Betegnelse	Beskrivelse
A	Fremragende	<p>Generelt: Fremragende prestasjon der kandidaten har løst problemer som krever fantasi og innsikt. Besvarelsen viser at kandidaten fullt ut behersker både de begrepsmessige, regnetekniske og anvendelsesmessige delene av emnet. Fremstillingen er klar og presis med korrekt bruk av notasjon og fagterminologi. Noen få mindre feil eller blanke punkter kan tillates.</p> <p>Klart ca 95% av besvarelsen</p>
B	Meget god	<p>Generelt: Meget god prestasjon der kandidaten har løst problemer som går utover det rutinemessige, og som krever god oversikt over emnet. Besvarelsen viser meget god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset. Fremstillingen er klar og med stort sett riktig bruk av terminologi og notasjon.</p> <p>Klart ca 80% av besvarelsen</p>
C	God	<p>Generelt: Gjennomsnittlig prestasjon der kandidaten har løst oppgaver av middels vanskelighetsgrad fra de fleste deler av kurset. Besvarelsen viser god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har ikke i særlig grad klart å anvende sine ferdigheter og kunnskaper på oppgaver som går ut over det rutinemessige. Fremstillingen er grei å forstå, men kan ha en del formelle mangler.</p> <p>Klart ca 60% av besvarelsen</p>
D	Nokså god	<p>Generelt: Prestasjon under gjennomsnittet der kandidaten har løst eller kommet et stykke på vei med oppgaver fra flere sentrale deler av kurset. Besvarelsen viser kjennskap til de viktigste teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har vanskelig for å komme helt i mål selv på rutinepregede oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men kan ha en god del formelle mangler.</p> <p>Klart ca 47% av besvarelsen</p>
E	Tilstrekkelig	<p>Generelt: Prestasjon som tilfredsstillir minimumskravene, men heller ikke mer. Besvarelsen viser at kandidaten har kjennskap til begreper, teknikker og anvendelser fra flere deler av kurset, og</p>

		<p>at han/hun til en viss grad kan bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men røper klare feil og misforståelser.</p> <p>Klart ca 40% av besvarelsen</p>
F	Ikke bestått	<p>Generelt: Prestasjon som ikke tilfredsstiller minimumskravene. Besvarelsen viser at kandidaten har manglende kjennskap til sentrale teknikker, begreper og anvendelser, eller manglende evne til å bruke sine kunnskapene til å løse oppgaver. Besvarelser som bare viser beherskelse av en avgrenset del av emnet, vil normalt havne i denne kategorien.</p>