SENSORVEILEDNING

Emnekode:	LMUMAT10420
Emnenavn:	Algebra, funksjoner, geometri og måling II (5-10)
Eksamensform:	Individuelt, skriftlig eksamen
Dato:	3. oktober 2022 9:00-15:00
Faglærer(e):	Natalia Bredrup (emnesansvarlig) Johan Bredberg
Eventuelt: Sensorveiledningen består av 14 sider	

Innhold

Denne sensorveiledningen inneholder:

1. **Vurderingskriterier for den enkelte karakter**
2. **Viktige elementer for vurderingen**
3. **Oppgavene med stikkordsmessig løsningsforslag**

1. Vurderingskriterier for den enkelte karakter

	Generelle kriterier Kilde: https://www.uio.no/studier/eksamen/karakterskala/fagspesifikk-karakterbeskrivelse/mn-math.html#skriftlig	**Prosent av besvarelsen som kan indikere karakter**
A	**Fremragende** prestasjon der kandidaten har løst problemer som krever fantasi og innsikt. Besvarelsen viser at kandidaten fullt ut behersker både de begrepsmessige, regnetekniske og anvendelsesmessige delene av emnet. Fremstillingen er klar og presis med korrekt bruk av notasjon og fagterminologi. Noen få mindre feil eller blanke punkter kan tillates.	[92% - 100 %]
B	**Meget god** prestasjon der kandidaten har løst problemer som går utover det rutinemessige, og som krever god oversikt over emnet. Besvarelsen viser meget god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset. Fremstillingen er klar og med stort sett riktig bruk av terminologi og notasjon.	[77% - 92 %)
C	**God** Gjennomsnittlig prestasjon der kandidaten har løst oppgaver av middels vanskelighetsgrad fra de fleste deler av kurset. Besvarelsen viser god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har ikke i særlig grad klart å anvende sine ferdigheter og kunnskaper på oppgaver som går ut over det rutinemessige. Fremstillingen er grei å forstå, men kan ha en del formelle mangler.	[58% - 77%)
D	**Nokså god** Prestasjon under gjennomsnittet der kandidaten har løst eller kommet et stykke på vei med oppgaver fra flere sentrale deler av kurset. Besvarelsen viser kjennskap til de viktigste teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har vanskelig for å komme helt i mål selv på rutinepregede oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men kan ha en god del formelle mangler.	[46 % - 58%)
E	**Tilstrekkelig** Prestasjon som tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Besvarelsen viser at kandidaten har kjennskap til begreper, teknikker og anvendelser fra flere deler av kurset, og at han/hun til en viss grad kan bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men røper klare feil og misforståelser.	[40 % - 46%)
F	**Ikke bestått** Prestasjon som ikke tilfredsstiller minimumskravene. Besvarelsen viser at kandidaten har manglende kjennskap til sentrale teknikker, begreper og anvendelser, eller manglende evne til å bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Besvarelser som bare viser beherskelse av en avgrenset del av emnet, vil normalt havne i denne kategorien.	[0 % - 40%)

Universitets – og høgskolerådet har utformet disse generelle, kvalitative beskrivelsen av de ulike karakterene:

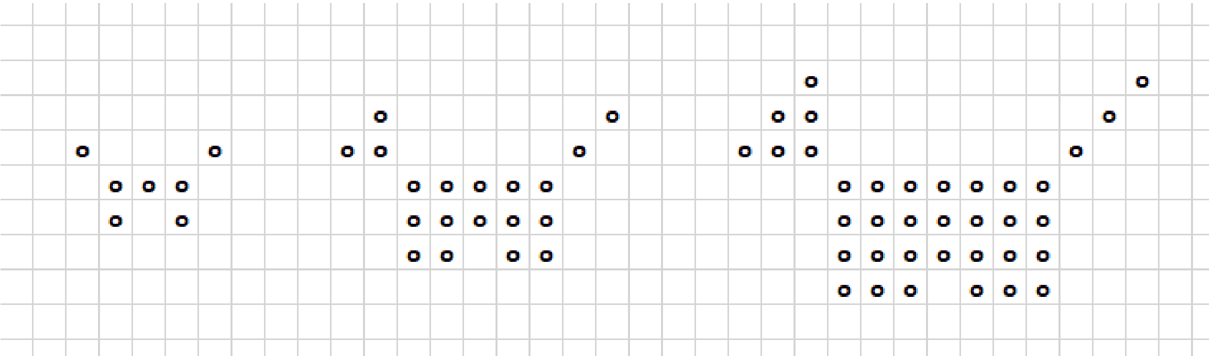
symbol	betegnelse	generell, ikke fagspesifikk beskrivelse av vurderingskriterier
A	fremragende	Fremragende prestasjon som klart utmerker seg. Kandidaten viser svært god vurderingsevne og stor grad av selvstendighet.
B	meget god	Meget god prestasjon. Kandidaten viser meget god vurderingsevne og selvstendighet.
C	god	Jevnt god prestasjon som er tilfredsstillende på de fleste områder. Kandidaten viser god vurderingsevne og selvstendighet på de viktigste områdene.
D	nokså god	En akseptabel prestasjon med noen vesentlige mangler. Kandidaten viser en viss grad av vurderingsevne og selvstendighet.
E	tilstrekkelig	Prestasjonen tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Kandidaten viser liten vurderingsevne og selvstendighet.
F	ikke bestått	Prestasjon som ikke tilfredsstiller de faglige minimumskravene. Kandidaten viser både manglende vurderingsevne og selvstendighet.

2. Viktige elementer for vurderingen

Nedenfor finnes forslag på løsninger. Det vil selvsagt være flere andre fremgangsmåter som kan gi full uttelling så her må det vurderes i hvert enkelt tilfelle. I gjennomgangen nedenfor er det indikert en maksimumspoengsum for hver av deloppgavene, og i noen grad utdypet hvordan poeng skal settes utover dette. **Det er imidlertid av stor betydning med en helhetlig vurdering.**

Oppgave 1 12% (3 + 3 + 3 + 3)

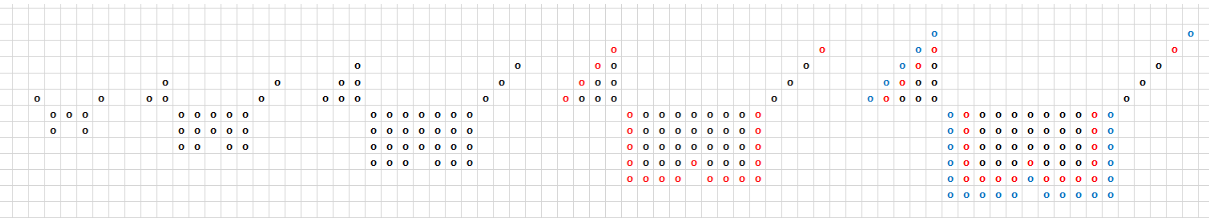
Se på følgende figurtall.



a) Finn antall prikker i tallene F_4 og F_5. Forklar tankegangen.
b) Beskriv med ord, hvordan mønsteret dannes.
c) Finn den eksplisitte formelen for F_n.
d) Fortell hva du vet om prealgebra, og hvordan slike oppgaver kan bidra i prealgebra læring (max en halvside).

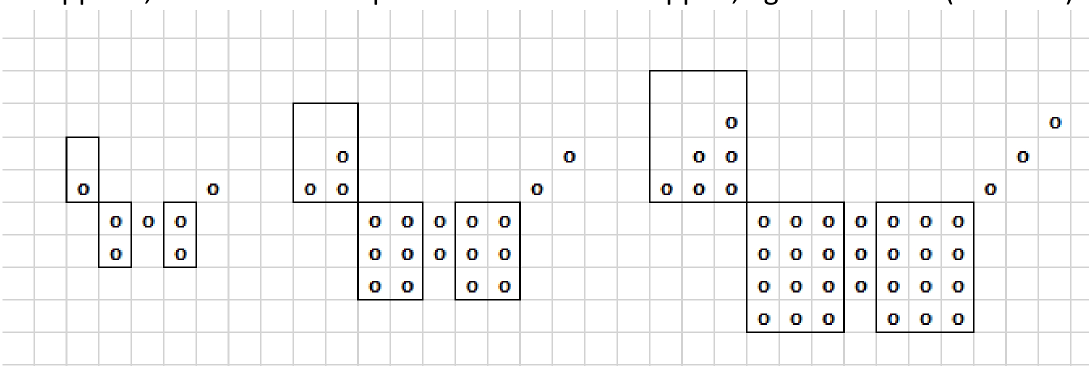
Løsningsforslag:

a) Hodet får ekstra lag på skrå, kroppen får ekstra lag i bunn og på sidene, halen utvides med en prikk.



Riktig tegning av begge figurene og holdbar forklaring 3p, bare riktige tegninger 2p, bare en riktig tegning 1p.

b) Man kan ha andre alternativer – f.eks. «kroppen» består av to kvadrattall + antall prikker *n* i midten, «føttene» består av antall prikker *n*, hver av dem, «hode» er fremstilt som trekant tall, og «halen» er like antall prikker *n*. Jeg ser på følgende måte: trekanttall T_n som «hode», to rektangeltall R_n som foran- og bakdelen av «kroppen», tallet *n* er antall prikker i midten av kroppen, og som «hale» (se bildet).



Forklaring vurderes på skjønn.

c) Bruker ord beskrivelse for å gjøre om til formel. Det er fordel med formelen som er forenklet, evt vurdering på skjønn.

$$F_n = T_n + 2 \cdot R_n + n + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + 2n \cdot (n+1) + 2n$$
$$= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 2n^2 + 2n + 2n = 2{,}5n^2 + 4{,}5n$$

d) Prealgebra kan tolkes bokstavelig som *før-algebra*, det betyr undervisningsopplegg og aktiviteter som kan ses som forberedende før en lærer innfører selve algebra. Slike oppgaver med figurtall er bra der elevene kan beskrive med ord hvordan mønstre og antall prikker varierer ut fra figurnummer, før man innfører selve begrepet om variabel. Kan nevne også overgang «retorisk – synkopert – symbolsk» algebra, men er ikke krav. Vurderes på skjønn.

Oppgave 2 10% (3 + 4 + 3)

Geometrisk visualisering kan være en bra tilnærming (verktøy) for å begrunne for algebraiske uttrykk og likninger.

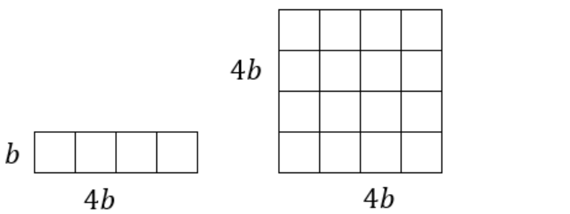
a) Jens lurer på om det er noe forskjell på uttrykkene $4b^2$ og $(4b)^2$. Bruk geometrisk visualisering for å forklare.
b) Petter har hørt at man kan bruke geometriske figurer for å løse andregradslikninger. Vis han hvordan man løser en slik likning ved å løse den gitte likningen, metode er også kjent som «å fullføre kvadrat»: $x^2 + 8x = 20$.

Utenom geometriske figurer, bør en lærer beherske algebraiske og grafiske metoder for å løse likninger, og se kobling mellom dem.

c) Du har laget en kvadratlikning og notert løsningen, men var så uheldig å søle kaffe på den, og det eneste du kan se er at likningen starter med $2x^2$, og at løsningene er $x_1 = -1$ og $x_2 = 4{,}5$. Finn den opprinnelige likningen (på utvidet form).

Løsningsforslag:

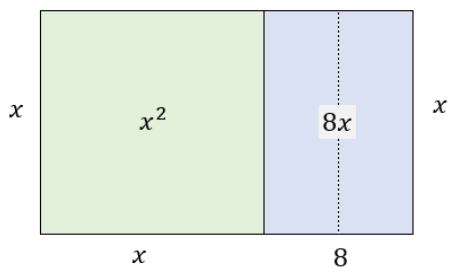
a) $4b^2$ er fire kvadrater b^2 satt sammen i rekka, ellers kan se på et rektangel $4b \cdot b$ med sidelengder $4b$ og b. Mens $(4b^2)$ er nemlig et kvadrat med sidelengde $4b$, derfor hele arealet danner 16 mindre kvadrater $4b \cdot 4b = 16b^2$.



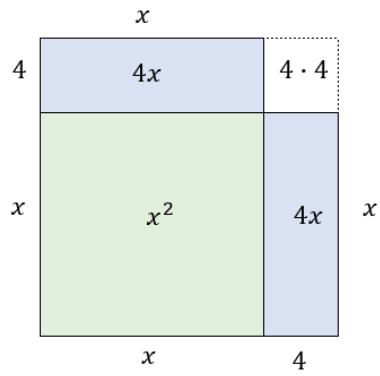
$A = 4b \cdot b = 4b^2$ $\quad$ $A = 4b \cdot 4b = 16b^2$

3p for tegning og forklaring, 2p for bare tegning uten å si noe mer.

b) Arealet $x^2 + 8x$ kan fremstilles ved hjelp av geometriske figurer, det er gitt at arealet til den gitte figuren er 20 a.e. Vi omgrupperer slik at vi får ufullstendig kvadrat.

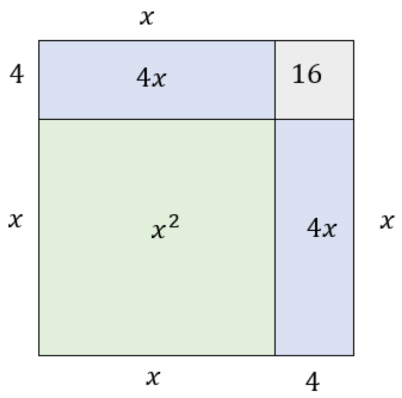


$x^2 + 8x = 20$

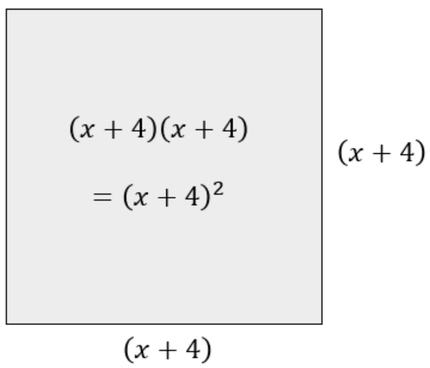


$x^2 + 2 \cdot 4x = 20$

Ved å legge til manglende hjørne med arealet $4 \cdot 4 = 16$ a.e. får vi fullstendig kvadrat der sidelengde er $(x + 4)$ og arealet skal være 20 + 16 = 36 a.e.



$x^2 + 2 \cdot 4x + 16 = 20 + 16$



$(x + 4)^2 = 36$

Sidelengde må være 6 enheter lang, dvs. $x + 4 = 6$, og $x = 2$ enheter.

4p for tegning og algebraisk løsning som følger i forklaringen, 2p for bare tegning uten selve løsningen, 2p for kun algebraiske løsningen og manglende tegning. Det holder at studenten finner den ene løsningen som hører til geometriske løsningen.

c) Her skal man bruke formelen for andregradsfaktorisering:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Siden likningen starter med 2, må være $a = 2$, setter inn kjente tall:

$$2(x - (-1))(x - 4{,}5) = 2(x + 1)(x - 4{,}5) = 2(x^2 - 4{,}5x + x - 4{,}5)$$
$$= 2(x^2 - 3{,}5x - 4{,}5) = 2x^2 - 7x - 9$$

Selve likningen skal være: $2x^2 - 7x - 9 = 0$

3p for korrekt føring og vise likningen på utvidet form, 2p for å sette opp formelen.

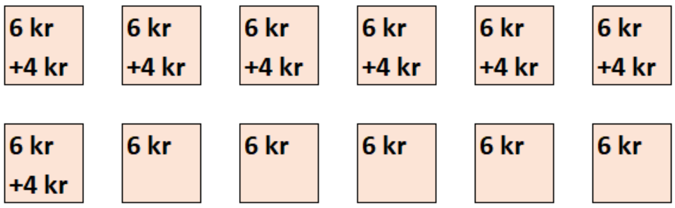
Oppgave 3 9% (3 + 3 + 3)

Rita kjøper boller i kiosken for hele familien. En rosinbolle koster 6 kr, og en sjokoladebolle koster 10 kr. Hun kjøper til sammen 12 boller og betaler for dem 100 kr. Hvor mange boller av hver type kjøper hun? Løs oppgaven på ulike nivåer som kan passe for ulike skoletrinn:

a) Ord resonnement der du viser til enkle begrunnelser og beregninger. Du kan bruke tegninger om du vil.
b) Ved hjelp av en systematisk tabell.
c) Ved å sette opp et ligningssystem og løse det.

Løsningsforslag:

a) Både tegning og resonnement gir 3p hvis tilstrekkelig forklaring, ellers vurderes på skjønn.



6*12 = 72 kr

100 - 72 = 28 kr

28 : 4 kr = 7 boller

Om Rita hadde kjøpt kun rosinboller, hadde hun brukt 72 kr, det er 28 kr igjen til å «oppgradere» boller med 4 kr til sjokoladeboller, differansen dekker 7 boller.

b) 3p hvis tabellen er systematisk og inneholder forklaringer i kolonner, ellers vurderes på skjønn.

<table>
<tr><td>Rosinboller, stk</td><td>Sjokoladeboller, stk</td><td>Totalt beløp</td></tr>
<tr><td>1</td><td>12 – 1 = 11</td><td>1*6 + 11*10 = 6 + 110 = 116 kr, for mye</td></tr>
<tr><td>2</td><td>12 – 2 = 10</td><td>2*6 + 10*10 = 12 + 100 = 112 kr, for mye</td></tr>
<tr><td>3</td><td>12 – 3 = 9</td><td>3*6 + 9*10 = 18 + 90 = 108 kr, for mye</td></tr>
<tr><td colspan="3">+ 1 rosinbolle, reduserer totalbeløpet med 4 kr. For å nå 100 kr, må gå ned 2*4 kr fra 108 kr. La oss prøve å øke antall rosinboller +2, vi tester 3 + 2 = 5 boller</td></tr>
<tr><td>5</td><td>12 – 5 = 7</td><td>5*6 + 7*10 = 30 + 70 = 100 kr stemmer!</td></tr>
</table>

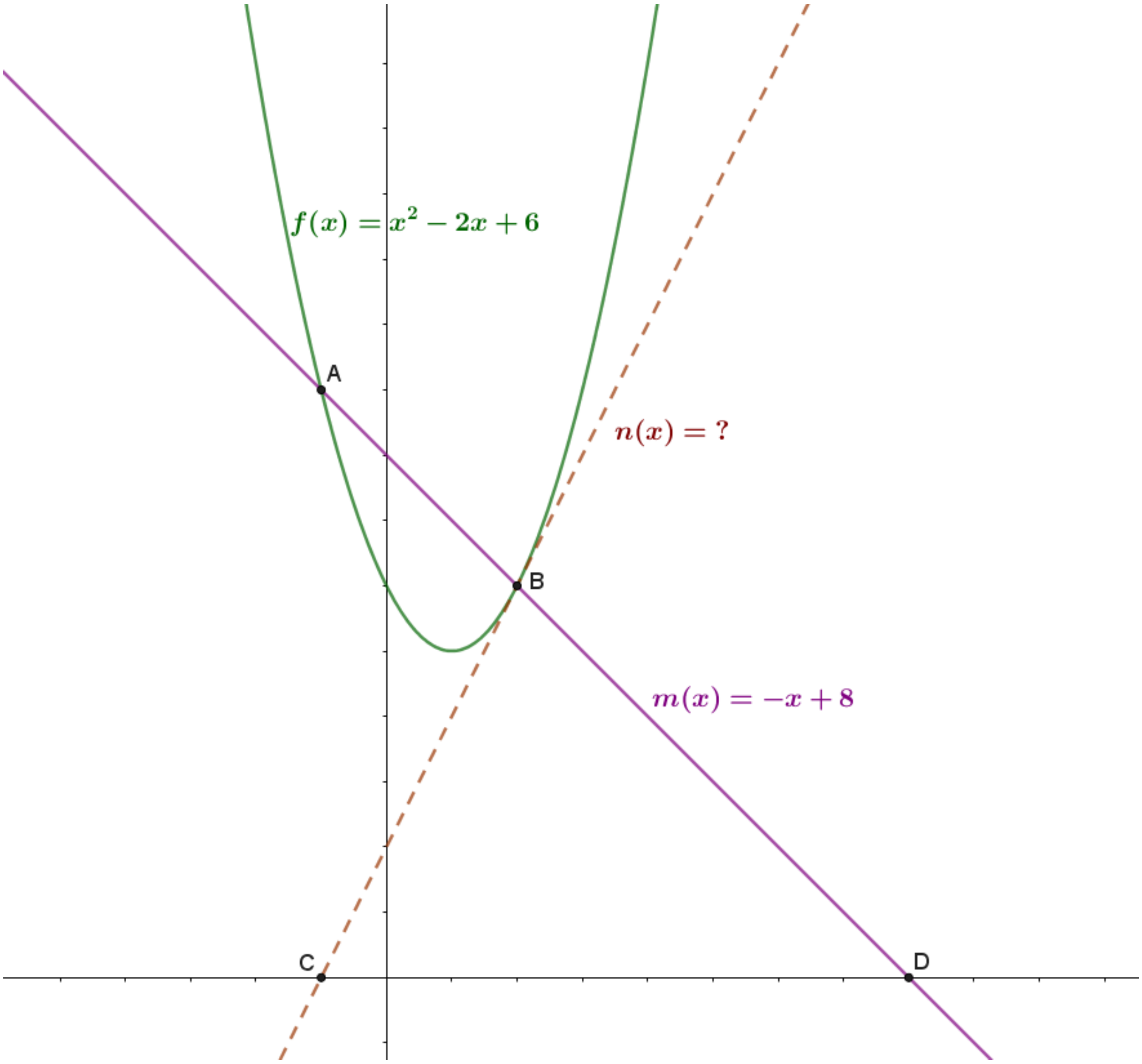
c) 3p hvis man løser riktig og forklarer hva de variablene står for (!), bare riktig system uten svar gir 2p, hvis man tolker og leverer svaret, kan gi opp til 2,5p.
La os si at antall rosinboller er gitt med r, og tilsvarende sjokoladeboller med s.

$$\begin{cases} r + s = 12 \\ 6r + 10s = 100 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} 6r + 6s = 72 \\ 6r + 10s = 100 \end{cases}$$

Addisjonsmetoden gir at $4s = 28$, og $s = 7$, deretter kan finne r:
$r + 7 = 12$, og $r = 5$.

<u>Svar:</u> Rita kjøpte 5 rosinboller og 7 sjokoladeboller.

Oppgave 4 38% (4 + 3 + 2 + 2 + 3 + 6 + 6 + 4 + 4 + 4)



Studer følgende graftegning: rett linje gitt med *m(x)* skjærer parabelen gitt med *f(x)* i punktene A og B. Linja gitt med *n(x)* er tangenten til parabelen som går gjennom punktet B.

a) Finn koordinater til punktene A og B ved å sette opp en likning og løse den.
b) Skriv funksjonsuttrykket *n(x)*.
c) Eirik sier at man kan finne symmetriakse til parabelen ved å beregne gjennomsnittet for *x*-koordinatene til A og B, dvs. hvis $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$, så finner man symmetriaksen slik:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Gi tilbakemelding til Eirik (1-2 setninger).

d) Finn symmetriaksen til *f(x)*.
e) Finn definisjonsmengde og verdimengde til *f(x)*.
f) Bruk dine kunnskaper i trigonometri for å beregne vinklene i trekanten *BCD*, rund av til hele °.
g) Bruk dine kunnskaper i vektorregning for å beregne sidelengder i trekanten *BCD*, vis eksakt svar.

h) Finn arealet til *BCD* ved å bruke geometri som passer på ungdomstrinnet.
i) Finn arealet til *BCD* ved å bruke integrasjon.
j) Finn arealet til *BCD* ved å bruke arealsetningen.

Løsningsforslag:

a) 4p for å sette opp andregradslikning, løse den og beregne andrekoordinaten til begge punktene, 3p hvis finner kun førstekoordinaten. 2p hvis prøver seg frem (f.eks. ved avlesning og sette inn i funksjonsuttrykket), 1p for avlesning.
$x^2 - 2x + 6 = -x + 8 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + x + 6 - 8 = 0$
Løser likningen $x^2 - x - 2 = 0$ og finner løsninger: $\quad x_1 = -1, x_2 = 2$
Husker at må finne andrekoordinat: $y_1 = -(-1) + 8 = 9, y_2 = -2 + 8 = 6$
Noterer koordinatene: $\quad A(-1, 9) \quad$ og $\quad B(2, 6)$

b) 3p for riktig anvendelse av formelen, 2p hvis satt opp med ikke forenklet på formen $y = n(x)$. Kan få opptil 2p hvis prøver å lese av grafen, hva er stigningstall og konstantledd. Ellers vurderes på skjønn.
$$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$
$$f'(x) = 2x - 2$$
$$f'(2) = 2$$
$$y - 6 = 2(x - 2)$$
$$y = n(x) = 2x - 4 + 6 = 2x + 2$$

c) Det kunne stemme for punktene der x-aksen skjærer parabelen, eller en annen linje parallell med x-aksen. Dvs. skjæringspunktene hadde ligget symmetrisk (like langt) fra symmetriaksen. Tenk at B sklir enda lenger ned til parabelens bunnpunkt, mener du fortsatt at A og B ligger like langt fra symmetriaksen? 2p for konstruktiv tilbakemelding, ellers vurderes på skjønn.

d) 2p for å finne korrekt symmetriaksen ved regning, 1p for avlesning av grafen.
Her kan bruke den deriverte: $f'(x) = 0 \quad$ eller $\quad 2x - 2 = 0$, og $x = 1$.

e) 1p for *D(f)*, 1p for å beregne minimal verdi til *f(x)*, 0,5p for avlesning av minimalverdi på grafen, 1p for *V(f)*:
$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 6 = 1 - 2 + 6 = 5$$
$$D(f) = R, \qquad V(f) = [5, \rightarrow)$$

f) 2p for hver korrekt beregning, evt. trekk for manglende forklaring.
Her kan man bruke tangens definisjon at tangens verdi til vinkelen som dannes en en gitt linje og x-aksen, er lik stingningstallet til denne linja, f.eks. $\tan C = 2$. Kan bruke vedlegg eller kalkulator og beregne at $\angle C = \arctan 2 \approx 63°$.
Man kan bruke samme formelen for å beregne at $\arctan -1 = 135°$ og dermed $\angle D = 45°$, eller resonnere ved å se på stigningstallet og forholdet mellom kateter.
$$\angle B = 180° - 63° - 45° = 72°$$

g) Ideelt sett skal man finne koordinatene til C og D ved å finne nullpunktene ved regning. Hvis man bare leser av koordinatene, mens resten er korrekt og tilstrekkelig argumentert, kan få opptil 5 p for hele oppgaven. Ellers 2p for hver sidelengde, ellers vurdering på skjønn:

$2x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \qquad C(-1, 0)$

$-x + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 8 \qquad D(8, 0)$

$\overrightarrow{CD} = [9, 0]$ og $\quad CD = |\overrightarrow{CD}| = 9$

$\overrightarrow{CB} = [3, 6]$ og $\quad CD = |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 9\sqrt{5}$

$\overrightarrow{BD} = [6, -6]$ og $\quad BD = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{6^2 + (-6)^2} = \sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2}$

h) 4p for fullstendig løsning og forklaring. Her kan man bruke formelen $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$
Høyden *h* er avstand fra punktet B til x-aksen, og den er lik 6 enheter.
Grunnlinja *g* = *CD* = 9 enheter.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6 = 27\ a.e.$$

i) 4p for fullstendig løsning, samt korrekt integrasjon.

$$A = \int_{-1}^{2} n(x)dx + \int_{2}^{8} m(x)dx = 9 + 18 = 27\ a.e.$$

$$\int_{-1}^{2} n(x)dx = \int_{-1}^{2} (2x + 2)dx = [x^2 + 2x]\begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix} = 2^2 + 2 \cdot 2 - \left((-1)^2 + 2 \cdot (-1)\right)$$
$$= 4 + 4 - (1 - 2) = 9$$

$$\int_{2}^{8} m(x)dx = \int_{2}^{8} (-x + 8)dx = \left[\frac{-x^2}{2} + 8x\right]\begin{matrix} 8 \\ 2 \end{matrix} = -\frac{8^2}{2} + 8 \cdot 8 - \left(-\frac{2^2}{2} + 8 \cdot 2\right)$$
$$= -32 + 64 - (-2 + 16) = 32 + 2 - 16 = 18$$

j) 4p for korrekt bruk av arealsetningen, og ved å benytte av presise verdier, 3p hvis bruker avrundede verdier. Den eneste vinkelen som har presis sinus verdi er

$\angle D = 45°$ og $\quad \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$A = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot DB \cdot \sin D = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 9 \cdot \cancel{6}\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9 \cdot 3 \cdot \cancel{\sqrt{4}}}{\cancel{2}} = 27\ a.e.$$

Oppgave 5 11% (2 + 3 + 3 + 3)

Rune går opp i et tårn, og slipper ned en ball når han har kommet til toppen. Hvis vi ser bort fra luftmotstanden, så kan høyden ballen befinner seg over bakken beskrives med funksjonen $h(t) = 78{,}4 - 4{,}9t^2$ der h er høyde i meter over bakken, og t er tiden i sekunder som har gått etter ballen ble sluppet ut.

a) Hvor høyt er tårnet?
b) Hvor lang tid går det før ballen treffer bakken?
c) Hva er ballens fart like før den treffer bakken?
d) Hva er ballens akselerasjon like før den treffer bakken?

Løsningsforslag:

a) 2p for korrekt svar og målenheter, 1p uten målenheter
Høyden på tårnet finner når tiden $t = 0$: $h(0) = 78{,}4\, m$

b) 3p for korrekt løsning, argumentasjon og svar, 2p hvis mangler målenheter og/eller forklaring, trekk 1p hvis finner begge svar (positiv og negativ) og mangler tolkning.
Her må løse likning $h(t) = 0$ eller $78{,}4 - 4{,}9t^2 = 0$ ⇔ $4{,}9t^2 = 78{,}4$
⇔ $t^2 = 16$ => $t = 4\, s$
Altså ballen treffer bakken etter 4 sekunder.

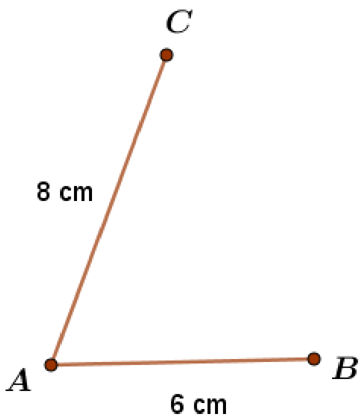
c) 3p for korrekt løsning, argumentasjon og svar, 2p hvis mangler målenheter og/eller forklaring. Ballen faller med farten uttrykt som førstederivert etter tiden t:
$$f(t) = h'(t) = 0 - 4{,}9 \cdot 2t = -9{,}8t\ m/s$$
Vi ser at farten varierer med tiden som går, og er negativ fordi retning er nedover.
Finner farten like før ballen treffer bakken, dvs. når $t = 4\, s$
$$f(4) = -9{,}8 \cdot 4 = -39{,}2\ m/s$$
Altså farten i den øyeblikket ballen treffer bakken er 39,2 m/s.

d) 3p for korrekt løsning, argumentasjon og svar, 2p hvis mangler målenheter og/eller forklaring. Finner akselerasjon som andrederivert etter t:
$$a(t) = h''(t) = (0 - 4{,}9 \cdot 2t)' = -9{,}8\ m/s^2$$
Vi ser at akselerasjon er konstant hele tiden ballen faller ned, også når den treffer bakken, akselerasjon er lik 9,8 m/s^2.

Oppgave 6 8% (3*2 + 2)

a) To linjestykker AB og AC er koblet sammen i punktet A (se bildet). Finn avstanden mellom punktene B og C når du vet at vinkelen mellom linjestykkene er:
   i. 90°
   ii. 60°
   iii. 120°

b) Man sier at cosinus setningen er også kalt for utvidelse av Pytagoras setningen. Forklar i 1-2 setninger, hva mener man med det.



Løsningsforslag:

a) 2p for hver deloppgave, for korrekt bruk av cos setningen / Pytagoras setningen.

   i. Her kan bare bruke Pytagoras:
   $BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$ og $BC = 10\ cm$

   ii. Bruker cos setning, der $\cos 60° = \frac{1}{2}$

$$BC^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 36 + 64 - 48 = 52$$

$$BC = \sqrt{52} \approx 7{,}2\ cm$$

   iii. Bruker cos setning, der $\cos 120° = -\frac{1}{2}$

$$BC^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 36 + 64 + 48 = 148$$

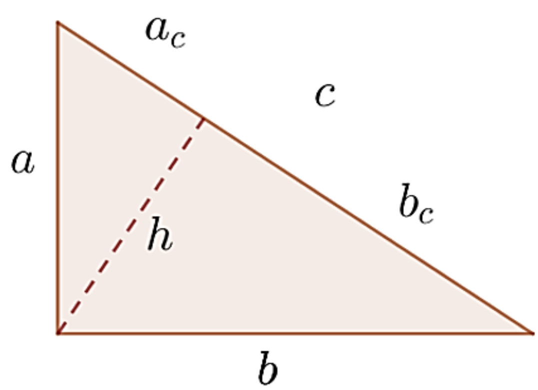
$$BC = \sqrt{148} \approx 12{,}2\ cm$$

b) 2p for holdbar forklaring, ellers på skjønn. Som vi kunne se i oppgave a), så kan man faktisk å beregne den tredje sidelengden i en trekant, hvis kjenner lengde til to av sidene, og størrelse på vinkelen. Og den setning gjelder ikke bare for rett vinkel, men også for stumpe og spisse. Så faktisk setningen kjent som Pytagoras er bare et enkelt tilfelle av cos setningen som omfatter flere vinkler. Bruker vi cos setningen for en rett vinkel får følgende: $\cos 90° = 0$

$$BC^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 0 = 36 + 64 - 0 = 100$$

Oppgave 7 12% (3*3 + 3)

Det er gitt en rettvinklet trekant med kateter *a* og *b*, og hypotenusen *c*. Høyden som går mot hypotenusen er *h*, og den deler hypotenusen i a_c og b_c.



a) Bruk trekant formlikhet for å bevise følgende:
   i. $a^2 = c \cdot a_c$
   ii. $b^2 = c \cdot b_c$
   iii. $h^2 = a_c \cdot b_c$

b) Bruk formlene du beviste i del a) for å bevise Pytagoras setningen.

Løsningsforslag:

a) 3p for tilstrekkelig argumentasjon, vurderes på skjønn ellers. Man bør nevne hvorfor trekantene er formlike, f.eks. VV. For manglende begrunnelse for formlikhet, kan trekke max 1p for hele del a).

   i. La oss se på den minste trekanten og den største – de er formlike, fordi begge er rettvinklede og har en felles vinkel (mellom *a* og *c*). Korresponderende sider i trekantene er: a_c og a, h og b, a og c. For formlike trekanter gjelder:
   $$\frac{a_c}{a} = \frac{a}{c} \quad \leftrightarrow \quad a_c \cdot c = a \cdot a \quad \leftrightarrow \quad a_c \cdot c = a^2$$

   ii. På samme måte resonnerer at mellomste trekanten og den største er formlike, siden begge er rettvinklede, og har felles vinkel (mellom *b* og *c*). Korresponderende sider er: h og a, b_c og b, b og c.
   $$\frac{b_c}{b} = \frac{b}{c} \quad \leftrightarrow \quad b_c \cdot c = b \cdot b \quad \leftrightarrow \quad b_c \cdot c = b^2$$

   iii. Her kan man bruke arealformlene: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ og $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$
   Hypotenusen *c* fungerer som grunnlinja her.
   Får at
   $$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot b = c \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{a \cdot b}{c}$$
   Opphøyer begge sider i annen potens, og anvender resultater fra i) og ii):
   $$h^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{c^2} = \frac{a_c \cdot c \cdot b_c \cdot c}{c^2} = \frac{a_c \cdot b_c \cdot c^2}{c^2} = a_c \cdot b_c$$

b) 3p for tilstrekkelig argumentasjon, vurderes på skjønn ellers.
   $$a^2 + b^2 = a_c \cdot c + b_c \cdot c = (a_c + b_c) \cdot c = c \cdot c = c^2$$