SENSORVEILEDNING

Emnekode:	LMUMAT10420
Emnenavn:	Algebra, funksjoner, geometri og måling II (5-10)
Eksamensform:	Individuelt, skriftlig eksamen
Dato:	25. mai 2022 9:00-15:00
Faglærer(e):	Natalia Bredrup (emnesansvarlig) Johan Bredberg
Eventuelt: Sensorveiledningen består av 14 sider	

Innhold

Denne sensorveiledningen inneholder:

1. **Vurderingskriterier for den enkelte karakter**
2. **Viktige elementer for vurderingen**
3. **Oppgavene med stikkordsmessig løsningsforslag**

1. Vurderingskriterier for den enkelte karakter

	Generelle kriterier Kilde: https://www.uio.no/studier/eksamen/karakterskala/fagspesifikk-karakterbeskrivelse/mn-math.html#skriftlig	**Prosent av besvarelsen som kan indikere karakter**
A	**Fremragende** prestasjon der kandidaten har løst problemer som krever fantasi og innsikt. Besvarelsen viser at kandidaten fullt ut behersker både de begrepsmessige, regnetekniske og anvendelsesmessige delene av emnet. Fremstillingen er klar og presis med korrekt bruk av notasjon og fagterminologi. Noen få mindre feil eller blanke punkter kan tillates.	[92% - 100 %]
B	**Meget god** prestasjon der kandidaten har løst problemer som går utover det rutinemessige, og som krever god oversikt over emnet. Besvarelsen viser meget god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset. Fremstillingen er klar og med stort sett riktig bruk av terminologi og notasjon.	[77% - 92 %)
C	**God** Gjennomsnittlig prestasjon der kandidaten har løst oppgaver av middels vanskelighetsgrad fra de fleste deler av kurset. Besvarelsen viser god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har ikke i særlig grad klart å anvende sine ferdigheter og kunnskaper på oppgaver som går ut over det rutinemessige. Fremstillingen er grei å forstå, men kan ha en del formelle mangler.	[58% - 77%)
D	**Nokså god** Prestasjon under gjennomsnittet der kandidaten har løst eller kommet et stykke på vei med oppgaver fra flere sentrale deler av kurset. Besvarelsen viser kjennskap til de viktigste teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har vanskelig for å komme helt i mål selv på rutinepregede oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men kan ha en god del formelle mangler.	[46 % - 58%)
E	**Tilstrekkelig** Prestasjon som tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Besvarelsen viser at kandidaten har kjennskap til begreper, teknikker og anvendelser fra flere deler av kurset, og at han/hun til en viss grad kan bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men røper klare feil og misforståelser.	[40 % - 46%)
F	**Ikke bestått** Prestasjon som ikke tilfredsstiller minimumskravene. Besvarelsen viser at kandidaten har manglende kjennskap til sentrale teknikker, begreper og anvendelser, eller manglende evne til å bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Besvarelser som bare viser beherskelse av en avgrenset del av emnet, vil normalt havne i denne kategorien.	[0 % - 40%)

Universitets – og høgskolerådet har utformet disse generelle, kvalitative beskrivelsen av de ulike karakterene:

symbol	betegnelse	generell, ikke fagspesifikk beskrivelse av vurderingskriterier
A	fremragende	Fremragende prestasjon som klart utmerker seg. Kandidaten viser svært god vurderingsevne og stor grad av selvstendighet.
B	meget god	Meget god prestasjon. Kandidaten viser meget god vurderingsevne og selvstendighet.
C	god	Jevnt god prestasjon som er tilfredsstillende på de fleste områder. Kandidaten viser god vurderingsevne og selvstendighet på de viktigste områdene.
D	nokså god	En akseptabel prestasjon med noen vesentlige mangler. Kandidaten viser en viss grad av vurderingsevne og selvstendighet.
E	tilstrekkelig	Prestasjonen tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Kandidaten viser liten vurderingsevne og selvstendighet.
F	ikke bestått	Prestasjon som ikke tilfredsstiller de faglige minimumskravene. Kandidaten viser både manglende vurderingsevne og selvstendighet.

2. Viktige elementer for vurderingen

Nedenfor finnes forslag på løsninger. Det vil selvsagt være flere andre fremgangsmåter som kan gi full uttelling så her må det vurderes i hvert enkelt tilfelle. I gjennomgangen nedenfor er det indikert en maksimumspoengsum for hver av deloppgavene, og i noen grad utdypet hvordan poeng skal settes utover dette. **Det er imidlertid av stor betydning med en helhetlig vurdering.**

Oppgave 1 14% (2 + 2 + 4 + 4 + 2)

a) Skriv de 4 stegene i Polya's problemløsningsmodell.
b) Hvilken av følgende oppgaver kan beskrives som en problemløsningsoppgave? Argumenter i 1-2 setninger.

6 stein leggere bruker 4 arbeidsdager for å legge stein på en gate som er 60 m lang og 16 m bred. Forutsett at 8 like dyktige arbeidere jobber i 9 dager og legger stein på en annen gate som er 24 m bred – hvor lang skal den være?	Løs systemet: $\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

c) Løs den oppgaven du mener er problemløsningsoppgave.

d) Løs ulikhet:

$$\frac{4x+11}{2x-3} \leq 3$$

e) En elev løste ulikheten slik:

$$4x + 11 \leq 3(2x - 3)$$

$$4x + 11 \leq 6x - 9$$

$$20 \leq 2x$$

$$x \geq 10$$

Gi tilbakemelding til eleven.

a) Det holder med å sette opp stegene punktvis: 1) Forstå problemet, 2) Lag en plan, 3) Gjennomføre planen, 4) Se tilbake (og reflektere) – antall riktige svar bestemmer poengsum. 2%
b) Oppgaven med steinleggere er en problemløsningsoppgave fordi det finnes ikke algoritme eller fremgangsmåte, man må finne ut selv hvordan skal finne svaret. 2%
c) Løser man oppgaven korrekt **uansett valget** (med tanke på følgefeil), gis det 4%

Oppgave med steinleggere: kan sette opp en likning eller holder med resonnement, det gir full uttelling. F.eks. sammenlikner vi økning i antall arbeidere og arbeidsdager sammen, og resonnerer at arbeidsmengde må øke tilsvarende:

$$\frac{8 \cdot 9}{6 \cdot 4} = 3$$

Dvs. arbeidsmengde / antall stein / areal på gata må øke i takt: den andre gata må være $A_{ny} = A_{gammel} \cdot 3 = 60 \cdot 16 \cdot 3\ (m^2)$

Finner bredden: $b_{ny} = \frac{60 \cdot 16 \cdot 3}{24} = \frac{60 \cdot 16 \cdot 1}{8} = \frac{60 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 120\ (m)$

Å løse systemet: kan bruke innsetnings eller addisjonsmetode, viktig at man finner begge løsningene:

$$\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Adderer, får en andregradslikning og løser den: $x^2 + 2x = 3$

Finner røttene x_1 og x_2, og deretter finner $y = 2x - 3$
Det blir to løsninger på systemet: $x_1 = -3, y_1 = -9$ og $x_2 = 1, y_2 = -1$
Kan skrives også slik: (-3, -9) og (1, -1).
Det gis 2% her hvis man finner kun x_1, x_2 uten å finne y_1, y_2.

d) Her kan man bruke fortegnsskjema, viktig å skille at nevneren har streng ulikhet:

$$\frac{4x + 11}{2x - 3} - 3 \leq 0$$

$$\frac{4x + 11}{2x - 3} - \frac{3(2x - 3)}{2x - 3} \leq 0$$

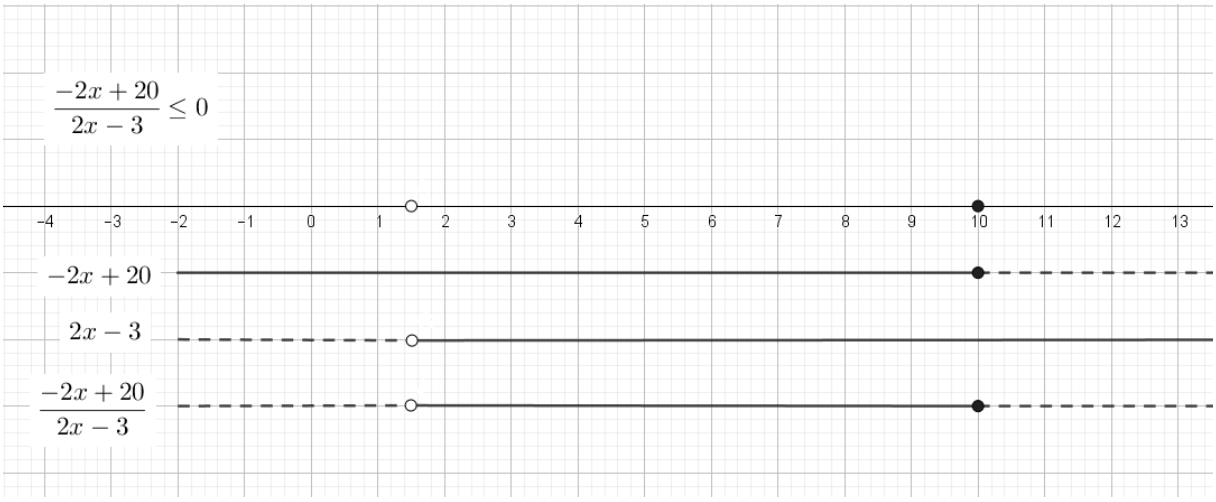
$$\frac{4x + 11 - 3(2x - 3)}{2x - 3} \leq 0$$

$$\frac{4x + 11 - 6x + 9}{2x - 3} \leq 0$$

$$\frac{-2x + 20}{2x - 3} \leq 0$$

Finner nullpunkter: $-2x + 20 = 0$ ⇔ $x = 10$ → inkludert

$2x - 3 = 0$ ⇔ $x = 1{,}5$ → er ikke med



Leser fra skjemaet at $x \in (\leftarrow, 1{,}5) \cup [10, \rightarrow)$

4% for komplett løsning, -1% hvis ikke tar hensyn til nullpunkt i nevneren, ellers vurderes på skjønn.

Oppgave 2 9% (3 + 3 + 3)

Ola får 150 kr/time, og Rita får 180 kr/time. En dag jobbet de til sammen i 18 timer og tjente totalt 3030 kr. Hvor mange timer jobbet hver av dem? Du skal løse oppgaven på ulike nivåer som kan passe for ulike skoletrinn:

a) Ord resonnement der du viser til enkle begrunnelser og beregninger. Du kan bruke tegninger om du vil.
b) Ved hjelp av en systematisk tabell.
c) Ved å sette opp et ligningssystem og løse det.

Alle deloppgaver får 3% ved full argumentasjon i a), forklaringer i tabellen i b), forklaringer hva betyr variablene i c) samt løsninger og tolkninger.

a) Alle arbeidstimer skal belastes med 150 kr minst, og beløpet blir $18 \cdot 150 = 2700\ kr$. Det blir $3030\ kr - 2700\ kr = 330\ kr$ til overs som kan fordeles på Rita sine timer som fikk per time 30 *kr* mer enn 150 *kr*. Antall Rita sine timer er $330 : 30 = 11$ timer. Dermed har Ola jobbet $18 - 11 = 7$ timer.

b) Tabell:

<table>
<tr><td>Ritas timer</td><td>Olas timer</td><td>Ritas lønn</td><td>Olas lønn</td><td>Samlet lønn</td></tr>
<tr><td>1</td><td>18 – 1 = 17</td><td>180 kr</td><td>150*17 = 2550 kr</td><td>180 + 2550 = 2730 kr</td></tr>
<tr><td>2</td><td>18 – 2 = 16</td><td>180*2 = 360 kr</td><td>150*16 = 2400 kr</td><td>360 + 2400 = 2760 kr</td></tr>
<tr><td>3</td><td>15</td><td>180*3 = 540 kr</td><td>150*15 = 2250 kr</td><td>540 + 2550 = 2790 kr</td></tr>
<tr><td colspan="5">Man kan skrive tabellen frem til svaret, eller resonnere at økning i Ritas timer på 1 time gir økning i samlet lønn på 30 kr. For å nå 3030 kr, må man legge til $3030 - 2730 = 300\ kr$ etter rad nr 1, og beløpet tilsvarer antall økninger på $300 : 30 =\ 10$ timer etter den 1. timen til Rita. Sjekker:</td></tr>
<tr><td>1+10 = 11</td><td>18 – 11 = 7</td><td>11*180 = 1980 kr</td><td>7*150 = 1050 kr</td><td>1980 + 1050 = 3030 kr</td></tr>
</table>

c) La oss si at Rita har jobbet x timer, og Ola har jobbet y timer. Får systemet:

$$\begin{cases} x + y = 18 \\ 180x + 150y = 3030 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -150x - 150y = -2700 \\ 180x + 150y = 3030 \end{cases}$$

Her ble det brukt addisjonsmetoden: multipliserer øverste med -150, og deretter adderer begge likningene: $30x = 330 \quad \Leftrightarrow \quad x = 11$

Bruker øverste likning for å finne y: $11 + y = 18 \quad \Leftrightarrow \quad y = 7$

Viktig å tolke løsningen tilbake til svaret: Rita har jobbet 11 timer, Ola har jobbet i 7 timer.

Oppgave 3 18% (2 + 4 + 3 + 3 + 6)

a) Forklar med egne ord begrepet «funksjons definisjonsmengde».
b) Bestem definisjonsmengde for følgende funksjoner:
   i. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
   ii. $g(x) = \frac{x^2+5}{3-\pi}$
c) Finn nullpunkter for $f(x) = x^2 - 8x + 15$. Løs likningen ved å fullføre kvadrat.
d) Du skal vise en 3.gradsfunksjon til elevene dine, og den skal ha nullpunkter -1, 2 og 4. Vis hvordan kan du lage funksjonsuttrykket, og skriv det i *utvidet* form.
e) Finn minimumsverdien til funksjonen $f(x) = x^2 - 8x + 15$:
   i. Ved å bruke nullpunkter og enkel forklaring / resonnement.
   ii. Ved å bruke den deriverte til funksjonen.

a) 2% Her er det nok å forklare med egne ord at «det er alle tillatte x verdier funksjonen kan ha».

b) i) 2%, $x^2 - 4 \geq 0$ her kan man skissere grafisk, eller bruke fortegnsskjema, eller resonnere med ord at $x \geq 2$ og $x \leq -2$.
Det er viktig at svaret kommer tydelig frem: $x \in (\leftarrow, -2] \cup [2, \rightarrow)$

ii) 2% for riktig forklaring at $x \in R$ fordi uttrykket i telleren skal deles på tallet $(3 - \pi) \neq 0$

c) 3% for fullstendig løsning. Finner nullpunkter ved å løse likningen $x^2 - 8x + 15 = 0$

$$x^2 - 8x = -15$$
$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = -15 + 4^2$$
$$(x-4)^2 = 1$$
$$x - 4 = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 3 \; og \; x_2 = 5$$

d) 3% hvis man setter opp uttrykket og utvider ved å løse opp parenteser og forenkler uttrykket:

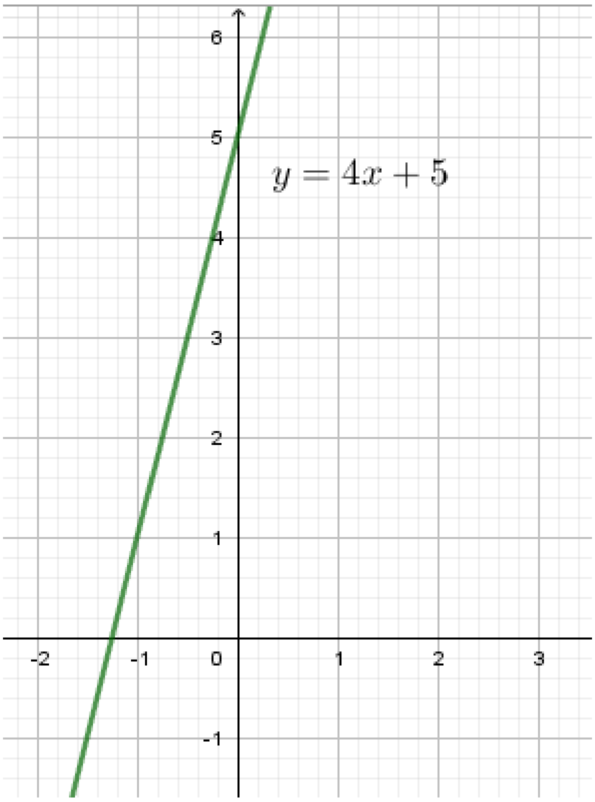
$$(x+1)(x-2)(x-4) = (x+1)(x^2 - 6x + 8) = x^3 - 6x^2 + 8x + x^2 - 6x + 8$$
$$= x^3 - 5x^2 + 2x + 8$$

e) i) 3% resonnerer at parabelen har sitt bunnpunkt på symmetrilinja som ligger midt mellom nullpunktene: $x = \frac{3+5}{2} = 4$, og deretter finner funksjons verdi:

$$f(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 15 = 16 - 32 + 15 = -1$$

ii) 3% for å argumentere at funksjonen har sitt minimumspunkt der $f'(x) = 0$.
Dvs. $2x - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$
Finner deretter funksjons minimum $f(4) = -1$

Oppgave 4 9% (2 + 2 + 2 + 3)



a) Simon påstår at stigningstallet for den gitte linja er $4x$. Gi tilbakemelding til Simon.
b) Simon har lært at det finnes en regel som bestemmer når linjer står vinkelrett. Hva er denne regelen?
c) Hvilken av følgende linjer står vinkelrett mot den gitte linja? Argumenter.

$$y = -4x - \frac{1}{5} \qquad y = -\frac{x}{4} + 3 \qquad y = \frac{x}{4} + 5$$

d) Punkter som ligger på samme linje, heter kolineære. Følgende punkter er gitt: (-2, -3), (-1, 1) og (1, 9). Begrunn for at disse punktene er kolineære ved hjelp av vektorlære.

a) 2% for korrekt tilbakemelding at stigningstallet er 4, det er tallet som viser hvordan grafen stiger, mens x er den verdi som varierer.
b) To linjer står vinkelrett hvis produkt av deres stigningstall er lik -1. Dvs. hvis den ene linja har stig.tall k_1, og den andre har k_2, da er det slik at linjene står vinkelrett hvis og bare hvis $k_1 \cdot k_2 = -1$. Det gis 2% hvis man forklarer tydelig nok med ord eller ved å bruke formelen, det er viktig å forklare hva bokstavene betyr.
c) 2% for riktig valg og argumentasjon: $y = -\frac{x}{4} + 3$, stig.tallet er $-\frac{1}{4}$ her
Den gitte linja hadde stig.tallet 4, og $4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -1$
d) 3% hvis man bruker vektorer i sin forklaring, 2% for annen tilstrekkelig argumentasjon. Setter navn på punktene: $A(-2,-3), B(-1,1), C(1,9)$

$$\overrightarrow{AB} = [1,4], og\ \overrightarrow{AC} = [3,12] = 3 \cdot [1,4] = 3 \cdot \overrightarrow{AB}$$

Det ble to parallelle vektorer som starter i samme punkt A.

Oppgave 5 6% (2 + 4)

Stian har etter *x* timer reist $y = (3x + 7)(4x + 5)$ km. Vi skal finne Stian sin hastighet etter 2 timer.

a) Stian prøver å beregne hastigheten på følgende måte:
$$y' = 3 \cdot 4$$
$$y'(2) = 3 \cdot 4 = 12$$
Kommenter to feil i Stian sin løsning.

b) Finn Stian sin hastighet etter 2 timer ved regning.

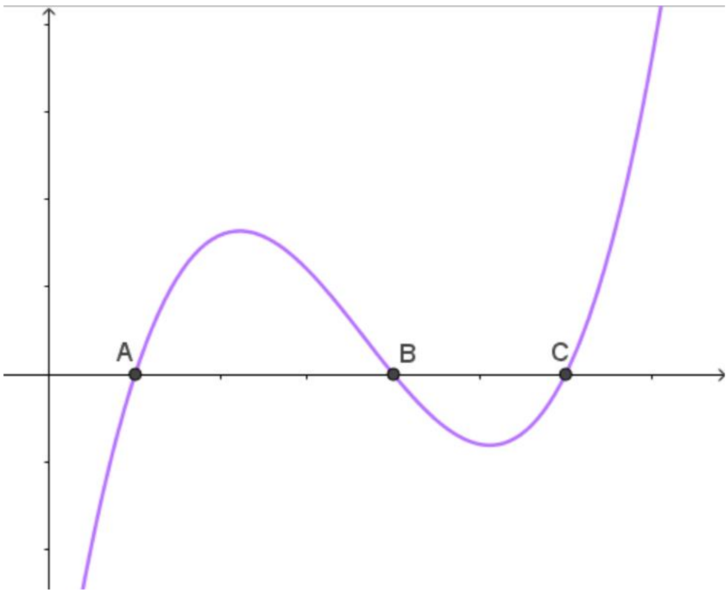
a) 1% for hver avdekket feil: feil derivasjon (skulle løse parenteser først), mangler benevning når regner hastighet.

b) 4% for korrekt derivasjon og utregning samt å huske benevning:
$$y = (3x + 7)(4x + 5) = 12x^2 + 15x + 28x + 35 = 12x^2 + 43x + 35$$
$$y' = (12x^2 + 43x + 35)' = 24x + 43$$
$$y'(2) = 24 \cdot 2 + 43 = 48 + 43 = 91 \frac{km}{t}$$
Det trekkes 1% hvis benevning / tolkning mangler.

Oppgave 6 11% (2 + 4 + 5)

Følgende funksjon uttrykker hastigheten gitt i km/t til en bil som kjører retning mot øst:

$$h(x) = x^3 - 11x^2 + 34x - 24$$



a) Begrunn ved regning at punkt A skjærer x-aksen der $x = 1$.

b) Finn koordinater til B og C ved å bruke langdivisjon.

c) Finn arealet til området avgrenset av grafen til $h(x)$ og x-aksen mellom punktene A og B, og gi praktisk tolkning til situasjonen.

a) 2% for korrekt argumentasjon at A er et nullpunkt fordi
$$h(1) = 1^3 - 11 \cdot 1^2 + 34 \cdot 1 - 24 = 1 - 11 + 34 - 24 = 0$$

b) 4% for å kunne fullføre polynomdivisjon og faktorisere resultatet videre, hvis det er bare utført korrekt divisjon, gis opp til 2% (oppgaven er løst halvveis). Om man gjetter seg frem / leser av aksene og sjekker nullpunktene, kan gis opp til 2%

$$(x^3 - 11x^2 + 34x - 24) : (x - 1) = x^2 - 10x + 24$$

$$\begin{array}{l}
x^3 - x^2 \\
\hline
\quad -10x^2 + 34x - 24 \\
\quad -10x^2 + 10x \\
\hline
\qquad\qquad 24x - 24 \\
\qquad\qquad 24x - 24 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

For å finne de andre nullpunktene, må løse likningen $x^2 - 10x + 24 = 0$

Metoden er ikke spesifisert, viktig med fullstendig forklaring. Kan bruke f.eks. Viete formler og finne to tall slik at summen er lik 10, og produktet er lik 24. Disse tallene er 4 og 6.

c) 4% for finne bestemt integral til $h(x)$ fra 1 til 4 (2% for selve integrasjon og 2% for utregning), og 1% for tolkning

$$\int_1^4 (x^3 - 11x^2 + 34x - 24)dx = \left[\frac{x^4}{4} - 11 \cdot \frac{x^3}{3} + 34 \cdot \frac{x^2}{2} - 24x\right]_1^4 =$$

$$= \left(\frac{4^4}{4} - 11 \cdot \frac{4^3}{3} + 34 \cdot \frac{4^2}{2} - 24 \cdot 4\right) - \left(\frac{1^4}{4} - 11 \cdot \frac{1^3}{3} + 34 \cdot \frac{1^2}{2} - 24 \cdot 1\right) =$$

$$= \left(64 - 11 \cdot \frac{64}{3} + 34 \cdot 8 - 24 \cdot 4\right) - \left(\frac{1}{4} - 11 \cdot \frac{1}{3} + 17 - 24\right) =$$

$$= 64 - 11 \cdot \frac{64}{3} + 34 \cdot 8 - 24 \cdot 4 - \frac{1}{4} + 11 \cdot \frac{1}{3} - 17 + 24 =$$

$$= 64 - 11 \cdot \frac{64}{3} + 272 - 96 - \frac{1}{4} + 11 \cdot \frac{1}{3} + 7 =$$

$$= 64 + 272 - 96 + 7 - \frac{1}{4} - 11 \cdot \frac{64}{3} + 11 \cdot \frac{1}{3} =$$

$$= 247 - \frac{1}{4} - 11\left(\frac{64}{3} - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= 247 - \frac{1}{4} - 11 \cdot \frac{63}{3} =$$

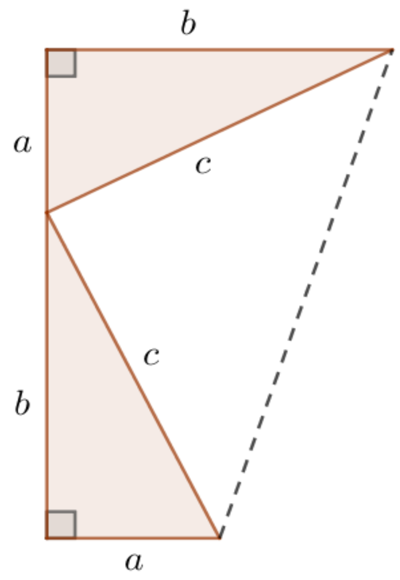
$$= 247 - \frac{1}{4} - 11 \cdot 21 =$$

$$= 247 - \frac{1}{4} - 231 = 16 - \frac{1}{4} = 15\frac{3}{4} = 15{,}75\ (km)$$

Det viser hvor langt har biler kjørt mot øst i tidsintervallet [1, 4] timer.

Oppgave 7 8% (6 + 2)

a) To kongruente rettvinklete trekanter er satt sammen som det vises på bildet. Ta utgangspunkt i dette bildet for å bevise Pytagoras læresetning.



b) Forklar hvorfor midtnormal på et linjestykke er et geometrisk sted. Hvilke krav stiller den?

a) 6% for fullstendig forklaring, evt mangler trekker poengsum ned, vurderes på skjønn.

Først må begrunne for at vinkelen som dannes av begge hypotenusene er rett. Kan bruke ord og tegning i forklaringer: kaller den minste vinkelen for α, så blir den andre spisse vinkelen $(90° - \alpha)$, og dermed vinkelen som dannes med hypotenusene er $180° - \alpha - (90° - \alpha) = 90°$.

Deretter finner arealet på to måter: figuren er satt sammen av tre trekanter, og finner samlet areal, eller å betrakte figuren som et rettvinklet trapes.

$$A = \frac{a \cdot b}{2} + \frac{a \cdot b}{2} + \frac{c \cdot c}{2} = a \cdot b + \frac{c^2}{2}$$

$$A = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot (a+b) = \frac{(a+b)^2}{2}$$

Begge uttrykkene viser til samme verdi (arealet), derfor:

$$a \cdot b + \frac{c^2}{2} = \frac{(a+b)^2}{2}$$

Multipliserer begge sider med 2: $2ab + c^2 = (a+b)^2$

$$2ab + c^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Trekker samme ledd $2ab$ fra begge sider: $c^2 = a^2 + b^2$ QED

b) 2% for å vise til definisjon at et geometrisk sted er samling av punkter som tilfredsstiller visse krav. Midtnormal på et linjestykke tilfredsstiller følgende krav: alle punktene på midtnormalen ligger like langt fra linjestykkets endepunkter. Man kan evt bruke enkle tegninger i sin forklaring.

Oppgave 8 10% (3 + 4 + 3)

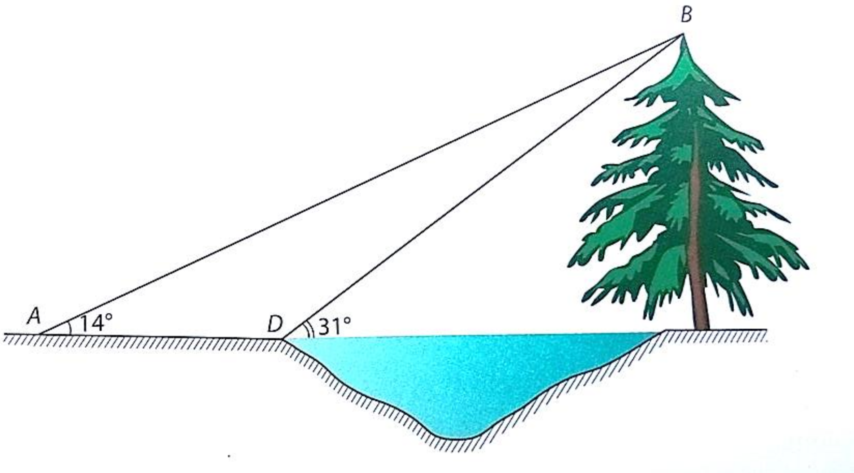
a) Forklar med egne ord begrepene «sin, cos, tan».

b) Bevis følgende:

   i. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

   ii. $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

c) Når du ser på toppen til grantreet fra elvekanten i punkt D, dannes en vinkel på 31°. Når du flytter deg 14 m lenger bort til punkt A, så blir vinkelen på 14°. Finn elvas bredde og treets høyde ved regning.



a) 1% for hvert begrep. Man kan bruke setninger f.eks. «forhold mellom hosliggende katet og hypotenus, i en rettvinklet trekant» eller tegninger hvor setter av bokstaver på sidene og vinklene og forklare symbolsk.

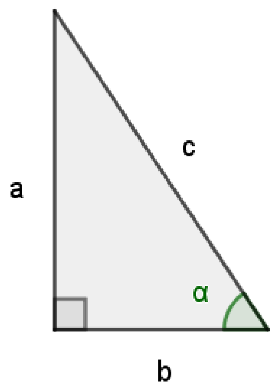
b) 2% hvor hver begrunnelse, det kreves skisse / annen forklaring for å få full uttelling.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2}$$

Ifølge Pytagoras $a^2 + b^2 = c^2$, derfor

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \tan\alpha$$



c) det gis 3% for fullstendig forklaring, kan hende noen skal løse «i omvei» som skiller med løsningsforslag: kaller treets høyde for h, og elvas bredde for b. Treet danner to rettvinklete trekanter, og kan bruke tan definisjon:

$\tan 31° = \frac{h}{b} \quad \Leftrightarrow \quad h = b \cdot \tan 31° = 0{,}60b$ (se vedlegg)

$\tan 14° = \frac{h}{b+14} \quad \Leftrightarrow \quad h = (b+14) \cdot \tan 14° = 0{,}25(b+14)$

Setter opp en likning og finner bredden: $0{,}60b = 0{,}25(b+14)$

$0{,}60b = 0{,}25b + 3{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}35b = 3{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad b = 10\ (m)$

Finner høyden: $h = 0{,}60b = 6\ (m)$

Oppgave 9 15% (2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 2)

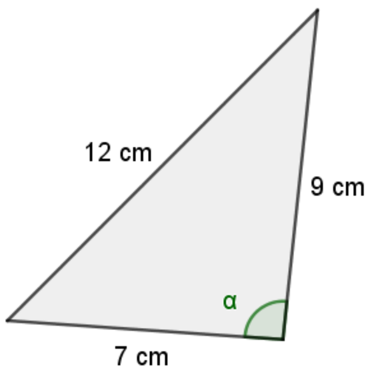
To trekanter er gitt, den ene har sidelengder 7 cm, 12 cm og 9 cm, og den andre har sidelengder 36 cm, 21 cm og 27 cm.

a) Forklar med egne ord, hva betyr «formlike figurer» og «kongruente figurer».
b) Begrunn at gitte trekanter er formlike.
c) Bevis at vinkelen som ligger mot den lengste sida i en av trekantene er stump. La denne vinkelen hete α.
d) Vis at $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{9}$.
e) Finn arealet til den minste av trekantene, vis eksakt svar.
f) Bruk resultat du fikk i del e) for å beregne arealet til den største av trekantene.

a) 2% for enkel men tilstrekkelig forklaring at «formlike figurer bevarer form, men må ikke være av samme størrelse. Kongruente figurer bevarer form og størrelse»

b) 2% hvis man henviser til setningen SSS eller forklarer at sidelengde danner samme forhold. Setter den først i stigende rekkefølge for hver trekant:
7 cm – 9 cm – 12 cm og 21 cm – 27 cm – 36 cm
Ser på forholdstall: $\frac{7}{21} = \frac{1}{3}$ $\quad \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$ $\quad \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

c) 3% for tilstrekkelig forklaring, resten vurderes på skjønn. Her skal jeg bruke den minste trekanten, lager en skisse:



Anvender cos setning for å finne $\cos\alpha$:

$$12^2 = 7^2 + 9^2 - 2\cdot 7\cdot 9\cdot\cos\alpha$$
$$144 = 49 + 81 - 126\cdot\cos\alpha$$
$$126\cdot\cos\alpha = 49 + 81 - 144$$
$$126\cdot\cos\alpha = -14$$
$$\cos\alpha = -\frac{14}{126} = -\frac{1}{9}$$

Siden $\cos\alpha < 0$, det må være en stump vinkel.

d) 3% for riktig anvendelse av enhetsformelen: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\sin^2\alpha + \left(-\frac{1}{9}\right)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2\alpha + \frac{1}{81} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2\alpha = \frac{80}{81}$$

Sinus er alltid positiv på både spisse og stumpe vinkler, derfor

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{80}{81}} = \sqrt{\frac{16\cdot 5}{81}} = \frac{4\cdot\sqrt{5}}{9}$$

e) 3% for korrekt utregning, 2% for avrunding, noen studenter kjenner Herons arealsetning, den gir også full uttelling. Ellers er det greit å bruke arealsetningen:

$$A_{liten} = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 9\cdot\sin\alpha = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot 7\cdot\cancel{9}\cdot\frac{4\cdot\sqrt{5}}{\cancel{9}} = 7\cdot 2\sqrt{5} = 14\sqrt{5}\ (cm^2)$$

f) 2% for enkelt resonnement at for skaleringsfaktor $k = 3$ for sidelengder gjelder at arealet skal være $k^2 = 3^2 = 9$ ganger så stort, dvs.

$$A_{stor} = 9\cdot A_{liten} = 9\cdot 14\sqrt{5} = 126\sqrt{5}\ (cm^2)$$