SENSORVEILEDNING

Emnekode:	LMUMAT10420 LMAT10420
Emnenavn:	Algebra, funksjoner, geometri og måling II (5-10)
Eksamensform:	Individuelt, skriftlig hjemmeeksamen
Dato:	19/01/2022 9:00-15:30
Faglærer(e):	Natalia Bredrup (emnesansvarlig) Johan Bredberg
Eventuelt: Sensorveiledningen består av **19** sider	

Innhold

Denne sensorveiledningen inneholder:

1. **Vurderingskriterier for den enkelte karakter**
2. **Viktige elementer for vurderingen**
3. **Oppgavene med stikkordsmessig løsningsforslag**

1. Vurderingskriterier for den enkelte karakter

	Generelle kriterier Kilde: https://www.uio.no/studier/eksamen/karakterskala/fagspesifikk-karakterbeskrivelse/mn-math.html#skriftlig	Prosent av besvarelsen som kan indikere karakter
A	**Fremragende** prestasjon der kandidaten har løst problemer som krever fantasi og innsikt. Besvarelsen viser at kandidaten fullt ut behersker både de begrepsmessige, regnetekniske og anvendelsesmessige delene av emnet. Fremstillingen er klar og presis med korrekt bruk av notasjon og fagterminologi. Noen få mindre feil eller blanke punkter kan tillates.	[92% - 100 %]
B	**Meget god** prestasjon der kandidaten har løst problemer som går utover det rutinemessige, og som krever god oversikt over emnet. Besvarelsen viser meget god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset. Fremstillingen er klar og med stort sett riktig bruk av terminologi og notasjon.	[77% - 92 %)
C	**God** Gjennomsnittlig prestasjon der kandidaten har løst oppgaver av middels vanskelighetsgrad fra de fleste deler av kurset. Besvarelsen viser god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har ikke i særlig grad klart å anvende sine ferdigheter og kunnskaper på oppgaver som går ut over det rutinemessige. Fremstillingen er grei å forstå, men kan ha en del formelle mangler.	[58% - 77%)
D	**Nokså god** Prestasjon under gjennomsnittet der kandidaten har løst eller kommet et stykke på vei med oppgaver fra flere sentrale deler av kurset. Besvarelsen viser kjennskap til de viktigste teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har vanskelig for å komme helt i mål selv på rutinepregede oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men kan ha en god del formelle mangler.	[46 % - 58%)
E	**Tilstrekkelig** Prestasjon som tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Besvarelsen viser at kandidaten har kjennskap til begreper, teknikker og anvendelser fra flere deler av kurset, og at han/hun til en viss grad kan bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men røper klare feil og misforståelser.	[40 % - 46%)
F	**Ikke bestått** Prestasjon som ikke tilfredsstiller minimumskravene. Besvarelsen viser at kandidaten har manglende kjennskap til sentrale teknikker, begreper og anvendelser, eller manglende evne til å bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Besvarelser som bare viser beherskelse av en avgrenset del av emnet, vil normalt havne i denne kategorien.	[0 % - 40%)

Universitets – og høgskolerådet har utformet disse generelle, kvalitative beskrivelsen av de ulike karakterene:

symbol	betegnelse	generell, ikke fagspesifikk beskrivelse av vurderingskriterier
A	fremragende	Fremragende prestasjon som klart utmerker seg. Kandidaten viser svært god vurderingsevne og stor grad av selvstendighet.
B	meget god	Meget god prestasjon. Kandidaten viser meget god vurderingsevne og selvstendighet.
C	god	Jevnt god prestasjon som er tilfredsstillende på de fleste områder. Kandidaten viser god vurderingsevne og selvstendighet på de viktigste områdene.
D	nokså god	En akseptabel prestasjon med noen vesentlige mangler. Kandidaten viser en viss grad av vurderingsevne og selvstendighet.
E	tilstrekkelig	Prestasjonen tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Kandidaten viser liten vurderingsevne og selvstendighet.
F	ikke bestått	Prestasjon som ikke tilfredsstiller de faglige minimumskravene. Kandidaten viser både manglende vurderingsevne og selvstendighet.

2. Viktige elementer for vurderingen

Nedenfor finnes forslag på løsninger. Det vil selvsagt være flere andre fremgangsmåter som kan gi full uttelling så her må det vurderes i hvert enkelt tilfelle. I gjennomgangen nedenfor er det indikert en maksimumspoengsum for hver av deloppgavene, og i noen grad utdypet hvordan poeng skal settes utover dette. Det er imidlertid av stor betydning med en helhetlig vurdering.

3. Oppgavene med stikkordsmessig løsningsforslag

Oppgave 1 (3 + 3 + 3 + 3 = 12 %)

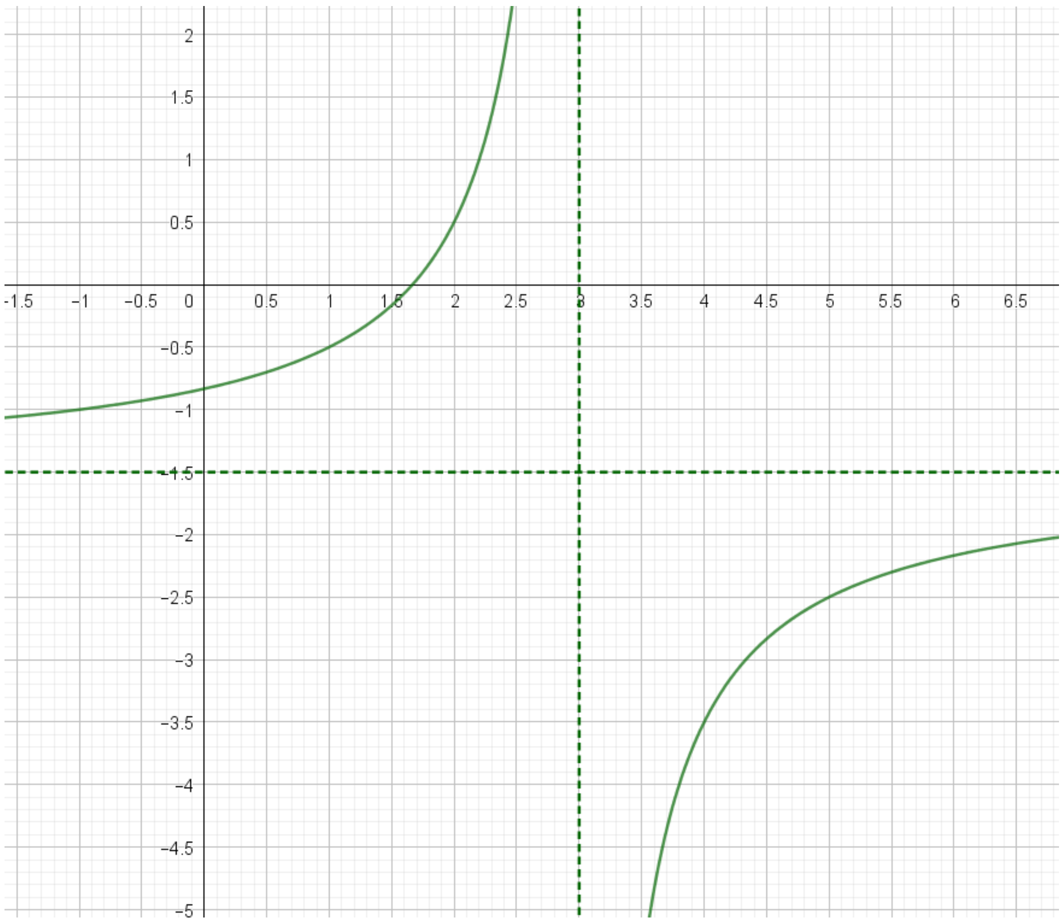
a) Lag en tekstoppgave for ungdomsskolen om en realistisk situasjon som kan løses ved hjelp av en lineær ulikhet. Din oppgavetekst skal ikke inneholde noen ukjente eller variabler, kun tekst og tall.

b) Vis hvordan ulikheten fra del a) kan settes opp som et uttrykk, og løs den algebraisk.

c) Du ble spurt av en ivrig elev hva omvendt proporsjonalitet er. Formuler svaret til eleven ved å bruke et konkret praktisk eksempel/situasjon.

d) Du skulle lage en oppgave om rasjonale funksjoner, men klarte å tørke bort deler av eksemplet: Heldigvis fant du en grafskisse med tilhørende graf:

$$f(x)= \frac{\quad x + 5}{\quad x - 6}$$



Bruk skissen for å gjenopprette funksjons-uttrykket.

Løsningsforslag:

a) Kandidaten viser til en korrekt eksempel / situasjon som forutsetter bruk av lineær ulikhet vurderes 3 p. Manglende opplysninger eller delvis treff vurderes til 1-2 p. Det kan være et klassisk eksempel som å velge et telefonabonnement f.eks.

b) Korrekt løsning og fullstendig notasjonsføring + 3p. Mangelfull eller delvis ukorrekt løsning 1-2 poeng. Det gis full uttelling hvis man løser som en lineær likning og resonnerer til svaret. F.eks. «Selskap A har lavere fast pris og er mest lønnsomt hvis man snakker lite. Etter hvert blir totalkostnad dyrere i lengden, da blir tilbudet fra B mer lønnsomt. osv.»

c) Kandidaten viser til en korrekt eksempel / situasjon som viser omvendt proporsjonalitet i praksis + 3 p. Manglende opplysninger eller delvis treff vurderes til 1-2 p. Det kan være et klassisk eksempel som å spleise på gave/hytteleie osv.

d) Her bør man starte med nevneren, og finne den savnede koeffisienten slik at uttrykket skal være lik null. Den vertikale asymptoten viser at $x \neq 3$. Hvis vi kalles koeffisienten for a, får at

$$a \cdot 3 - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot 3 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2$$

Etter det kan bruke den horisontale asymptoten, og resonnere muntlig eller symbolsk ved å bruke grensebegrepet at $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{bx+5}{2x+6} = -1{,}5$, altså for store positive (samme for negative) x verdier gjelder at

$$\frac{b}{2} = -1{,}5 \quad \leftrightarrow \quad b = -1{,}5 \cdot 2 = -3$$

Fullstendig forklaring/resonnement + 3p, hvis man finner kun $a = 2$, da får 1,5 p. Hvis ikke klarer å finne frem til riktige svar, men viser til teori gis 1p. Delvis løsning kan vurdere fra 0,5 til 2,5 p ut fra om begge koeffisientene ble funnet, og hvor utdypende eller mangelfull forklaring.

Oppgave 2 (3 + 2 + 4 + 4 = 13 %)

Det er gitt følgende ligningssystem: $\begin{cases} 3x + 2y = 25 & (1) \\ x + y = 11 & (2) \end{cases}$

a) Lag en tekstoppgave som passer inn med det gitte systemet.

b) Begrunn hvorfor systemet har akkurat én løsning (1-2 setninger).

c) Løs systemet algebraisk.

d) Vis hvordan man kan løse tekstoppgaven i del a) uten å sette opp systemet eller bruke algebra.

Løsningsforslag:

a) Tekst oppgaven vurderes på skjønn, 3 p gis for en oppgave som er forståelig, og ikke minst matcher med systemet.

b) Kan forklare ved å referere til rette linjer, som skal ha bare ett skjæringspunkt, hvis man viser til løsning i punkt c), kan få 1 p.

c) Algebraisk menes ved å bruke innsetnings eller addisjonsmetode. Korrekt løsning, samt notasjonsføring samt svar notasjon +4 p, evt. feil og mangel trekker ned. Hvis har funnet bare en korrekt verdi (x eller y), kan få 2 eller 2,5 p, f.eks.

   Addisjons metode: multipliserer (2) med 2, og trekker likningen fra likning (1)

   $\begin{cases} 3x + 2y = 25 & (1) \\ 2x + 2y = 22 & (2) \end{cases}$

   $(3x + 2y) - (2x + 2y) = 25 - 22 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$

   Nå kan finne også y ved å sette $x = 3$ i likning (1) eller (2):

   $3 \cdot 3 + 2y = 25 \quad \Leftrightarrow \quad 9 + 2y = 25 \quad \Leftrightarrow \quad 2y = 16 \quad \Leftrightarrow \quad y = 16$

   Svar: $(x, y) = (3, 16)$

d) 4p hvis man kan løse ved å resonnere gjennom tegning eller ord. Hvis man bruker f.eks. bord og antall sitteplasser i del a), kan vise løsning ved å tegne. Først fordeler man på 2 sitteplasser på alle bord (og dem er 11 stk), deretter ser at det blir 3 plasser igjen. Både tegning og holdbart resonnement kan få full uttelling. Ufullstendig forklaring trekker ned. Kandidat kan vise en annen måte å løse, må vurdere på skjønn.

Oppgave 3 (4 + 3 + 4 = 10 %)

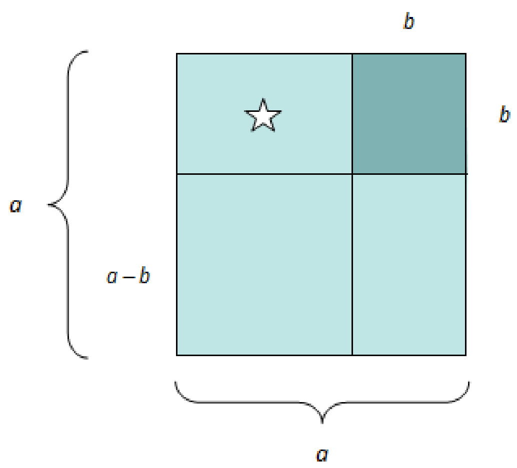
a) Begrunn konjugatsetningen ved å bruke geometrisk tilnærming

b) Faktoriser 391 ved å bruke konjugatsetningen

c) En lærer viser mattetriks hvordan man kan opphøye i annen alle tall på formen «n,5» på en enkel måte, dvs. alle tall som har siffer 5 etter komma. F.eks. hvis man skal «kvadrere» tallet 8,5, så bør man multiplisere det hele tallet 8 med etterfølgende hele tallet 9, og så skrive 25 etter komma, altså: $8{,}5^2 = (8 \cdot 9), 25 = 72{,}25$. Bruk dine kunnskaper om kvadratsetningene for å forklare dette «trikset».

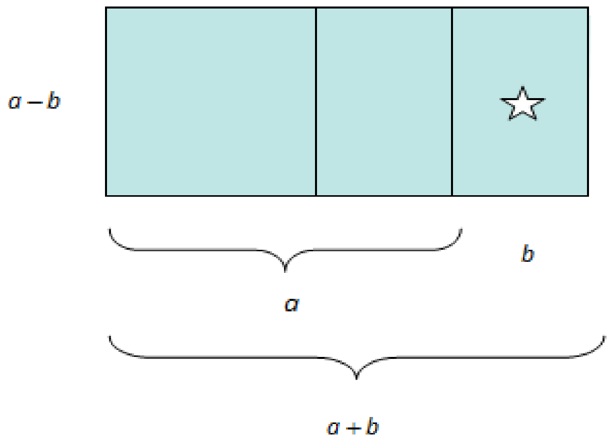
Løsningsforslag:

a) Tydelig tegning med klart resonnement gir 4p. Mangel og feil trekker ned, vurderes på skjønn. Hvis man ikke kan visualisere, men forsøker å trekke konkrete eksempler med tall, kan få max 1 p.



Forslag:

$a^2 - b^2$ er faktisk arealet til det lyse område. Det består av et kvadrat med sidelengde $(a - b)$ med arealet tilsvarende $(a - b)^2$, og to rektangler der den ene sida er $(a - b)$, og den andre er lik b, arealet til hvert rektangel er dermed $b \cdot (a - b)$. Hvis vi klipper bort rektangelet med stjerne og setter inntil rektangelet til høyre, får følgende:



Det skal dannes et stort rektangel med sidelengder $(a-b)$ og $(a+b)$, og arealet blir dermed $(a-b)\cdot(a+b)$. Altså, samme areal uttrykkes $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$

b) Forslag: $391=400-9=20^2-3^2=(20-3)\cdot(20+3)=17\cdot 23$, gis 3 p. Hvis man prøver primfaktorisering eller prøve seg frem, gis 1 p, ved evt. feil 1-2 p.

c) Krevende oppgave, så lengde kandidaten klarer å argumentere for sin løsning, kan gi 4 p. Manglende forklaring kan vurderes på skjønn. Hvis kandidaten klarer å skrive oppstart, f.eks. $8{,}5^2=(8+0{,}5)^2$ eller $8{,}5^2=(9-0{,}5)^2$ uten å gå videre, kan få 1 p. Forslag: bruke f.eks. 1. kvadratsetning i sitt resonnement.

$$8{,}5^2=(8+0{,}5)^2=8^2+2\cdot 8\cdot 0{,}5+0{,}5^2=8\cdot 8+8\cdot 1+0{,}25$$
$$=8\cdot(8+1)+0{,}25=8\cdot 9+0{,}25=72{,}25$$

Oppgave 4 (2 + 2 + 4 = 8 %)

a) En antikvitet er i dag verd 5000 kr. Hvert år øker verdien med 4%. Skriv et funksjonsuttrykk som viser verdien etter *t* år. Hva heter den type funksjoner?

b) Ta utgangspunktet i dette eksemplet for å forklare begrepet «doblingstid».

c) Klas fra ungdomsskolen tror at doblingstiden er 25 år. Hvordan kan han ha tenkt? Hvilken tilbakemelding skal du gi til Klas?

Løsningsforslag:

a) 2 p. for korrekt notasjon og svar hva slags funksjon det er: $f(t)=5000\cdot 1{,}04^t$ er eksponential funksjon, hvor 1,04 er vekstfaktoren og t er antall år.

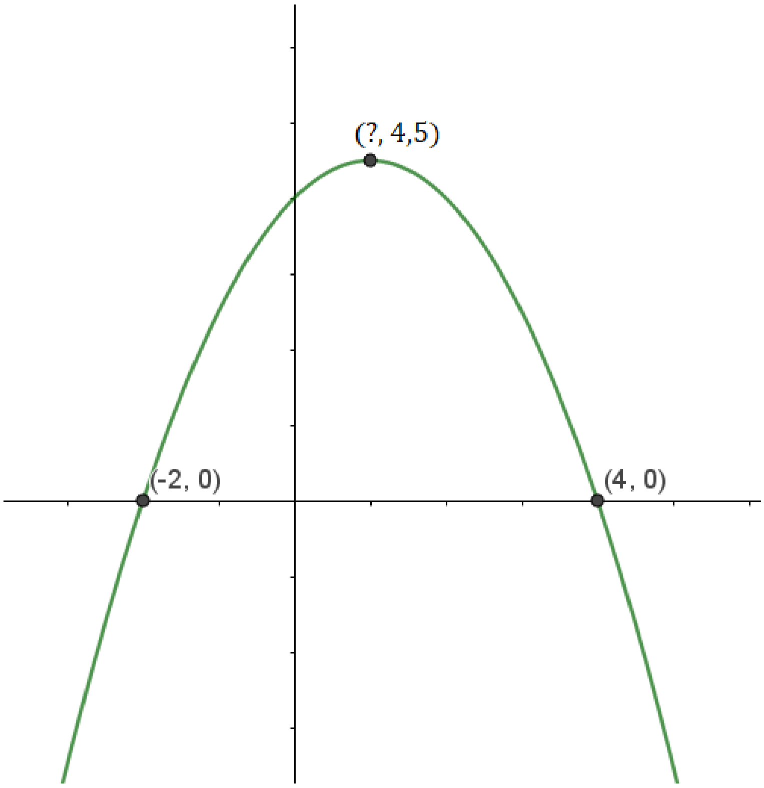
b) 2 p. for tydelig forklaring, f.eks. «Vekstfaktoren er større enn 1, det betyr voksende funksjon, som går mot uendelig i lengde. Etter visst tid, kommer den verdien til å være dobbelt så stor som i starten, altså 10 000 kr. Dette intervallet er altså doblingstid».

c) 2 p. hvis klarer å «knekke» Klas sin tankegang – å multiplisere 4% med 25 og få 100% vekst, som tilsvarer dobling av verdi. 2 p. for god tilbakemelding, f.eks. å tilby Klas å teste sin teori hvis verdien øker med 50% pr år, ikke 4% - blir doblingstiden 2 år da? Det er lett å sjekke ved regning og analysere svaret. Andre alternative svar vurderes på skjønn.

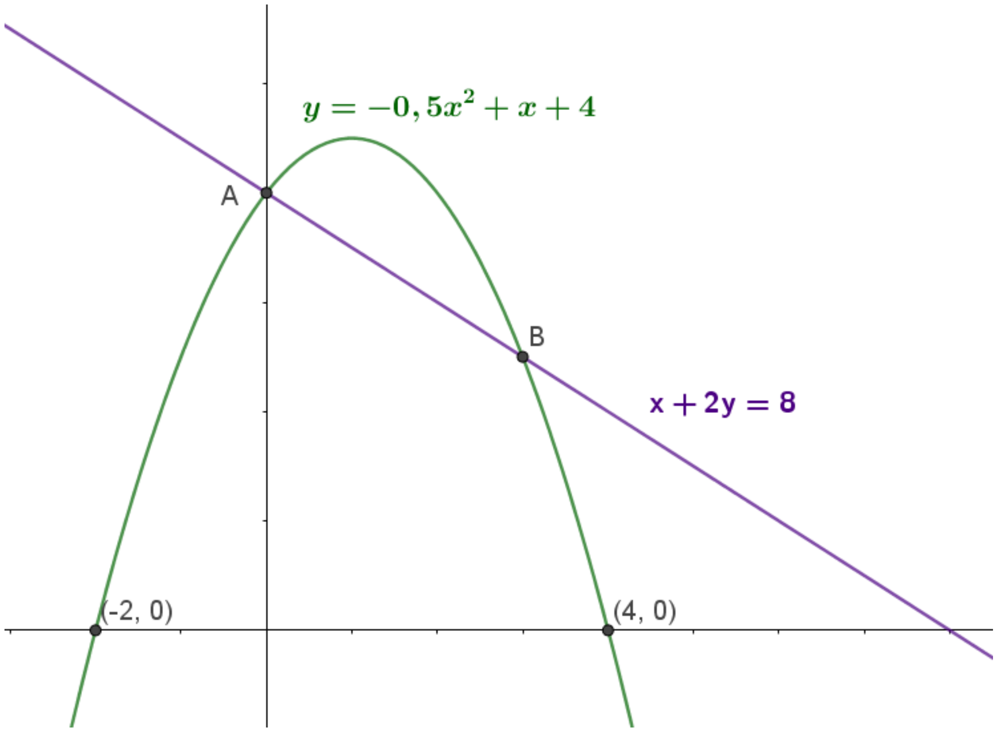
Oppgave 5 (3 + 2 + 3 + 4 + 4 + 3 + 3 = 23 %)

a) Du ønsker å gi flere andregradslikninger til dine elever, men finner ikke i boka. Du er nødt til å lage egne likninger. Vis hvordan du kan lage en andregradslikning som har to ulike løsninger, og de to løsningene er 7 og -4.

b) Grafen til en funksjon $y = ax^2 + bx + c$ er vist på bildet.
   i. Finn førstekoordinat til toppunktet
   ii. Begrunn ved regning at grafen hører til funksjonen $y = -0{,}5x^2 + x + 4$



c) Ved å konstruere en graf for likningen $x + 2y = 8$ i samme grafområde som i del b), får vi skjæringspunkter A og B. Finn koordinater til skjæringspunktene ved å sette opp et ligningssystem.



d) Finn arealet til området i koordinatplanet som blir avgrenset med ovennevnte grafene.

e) Vis hvordan du kan bruke den deriverte for å skrive likningen til tangenten som går gjennom punktet B

f) Beregn vinkelen linja gitt i del c) danner med x-aksen, avrund svaret til en desimal.

Løsningsforslag:

a) Hvis kandidaten vet hvordan kan anvende faktoriseringssetning «baklengs», så gis det 3 p., selv om man velger det enkleste eksemplet:

$$(x-7)\big(x-(-4)\big) = (x-7)(x+4) = x^2 - 7x + 4x - 28 = x^2 - 3x - 28$$

Altså viser dette eksemplet, uten å involvere andre a verdier enn $a = 1$, full uttelling. Viser kandidaten alternative måter å løse (enn å prøve seg frem) og kan argumentere for dem, kan evt. vurderes 3 p, ellers vurderes på skjønn. Prøver man seg frem til å lage en likning, kan gis opp til 1,5 p.

b) i) 2 p. hvis viser at førstekoordinaten skal finnes i midten mellom nullpunktene, hvis man tenker symmetrilinja, altså $x_0 = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Gis 0,5-1 p. hvis man «ser at førstekoordinaten skal være lik 1» og forklarer noe.

ii) 3 p. hvis argumenterer alle steg, 2 p. hvis delvis riktig, men mangelfull forklaring, 1p. hvis forsøker å trekke inn relevant teori uten å anvende.

Forslag: anvende nullpunktmetode for å finne funksjonsuttrykket:

$$a\big(x-(-2)\big)(x-4) = a(x+2)(x-4) = a(x^2-4x+2x-8) = a(x^2-2x-8)$$

Deretter anvende topp punkts koordinater for å bestemme a:

$f(1) = 4{,}5$ eller $a(1^2 - 2\cdot 1 - 8) = 4{,}5$

$$-9a = -4{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad a = -0{,}5$$

Evt. kan vise at nullpunktene og topp-punktet hører til gitt funksjons graf, ved regning. Viser kandidaten andre alternative løsninger og argumenterer, vurderes på skjønn.

c) 4 p. hvis setter ligningssystem og løser korrekt, samt notasjonsføring, 2-3 p. hvis delvis riktig eller prøver å argumentere noe, men mangelfull løsning, 1 p. hvis bare setter opp system uten å løse det, 1 p. hvis «gjetter» løsninger riktig.

$$\begin{array}{lr} (1) & y = -0{,}5x^2 + x + 4 \\ (2) & x + 2y = 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} 2*(1) & 2y = -x^2 + 2x + 8 \\ (2) & 2y = 8 - x \end{array}$$

Får følgende likning: $-x^2 + 2x + 8 = 8 - x \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 3x = 0$

Finner at $x_A = 0$, og ut fra likning (2) at $0 + 2y = 8 \quad \Leftrightarrow \quad y_A = \frac{8}{2} = 4$

tilsvarende $x_B = 3$, og $3 + 2y = 8 \quad \Leftrightarrow \quad y_B = \frac{5}{2} = 2{,}5$

Svar: koordinater til skjæringspunkter er $A(0,4)$ og $B(3;\ 2{,}5)$

d) 4 p. hvis setter opp og løser integraler riktig, samt argumenterer. 2-3 p. hvis delvis riktig eller prøver å argumentere noe, men mangelfull løsning, 1 p. hvis bare setter opp integraler uten å kunne løse.

Forslag: skraverer avgrenset området, der parabelen er den øverste grensa, og rett linja avgrenser nede, derfor skal arealet regnes ved å sette opp et bestemt integral med grensene tilsvarende x-koordinater til skjæringspunktene:

$A = \int_0^3 (-0{,}5x^2 + x + 4)dx \ - \int_0^3 (4 - 0{,}5x)dx$ → må huske å skrive funksjonsutrykk for den rette linja som $f(x) = \frac{8-x}{2} = 4 - 0{,}5x$

Kan forenkle: $A = \int_0^3 \big((-0{,}5x^2 + x + 4) - (4 - 0{,}5x)\big)dx \ =$

$$A = \int_0^3 (-0{,}5x^2 + x + 4 - 4 + 0{,}5x)dx \ = \int_0^3 (-0{,}5x^2 + 1{,}5x)dx$$

$$A = \left(-0{,}5 \cdot \frac{1}{3}x^3 + 1{,}5 \cdot \frac{1}{2}x^2\right)_0^3 = -0{,}5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3^3 + 1{,}5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3^2$$

$$A = -\frac{1}{2} \cdot 9 + \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{2} = -\frac{18}{4} + \frac{27}{4} = \frac{9}{4}$$

e) 3 p. hvis kan anvende formelen korrekt, og forklarer/sier noe at tangenten skal tangere parabelen, altså skal anvendes mot funksjonen $f(x) = -0{,}5x^2 + x + 4$. Hvis kandidaten ikke sier noe om det, men velger allikevel riktig funksjon, så teller det like mye også. Henter formelen fra vedlegget: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

Here er det $a = 3$, altså førstekoordinat til B.

$f(3) = -0{,}5 \cdot 3^2 + 3 + 4 = -0{,}5 \cdot 9 + 7 = -4{,}5 + 7 = 2{,}5$

$f'(x) = -0{,}5 \cdot 2x + 1 = -x + 1$ og $f'(3) = -3 + 1 = -2$

Finner likningen for tangenten: $y - 2{,}5 = -2(x - 3)$

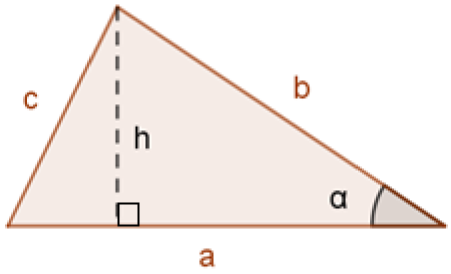
Forenkler: $y = 2{,}5 + (-2) \cdot (x - 3)$ ⇔ $y = 2{,}5 - 2x + 6$

Svar: $y = -2x + 8{,}5$

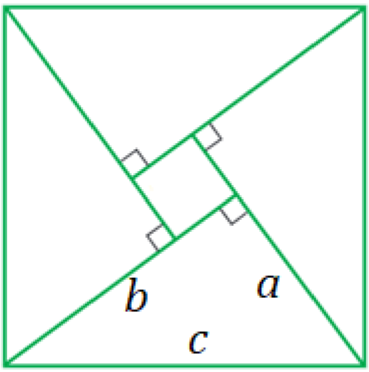
f) Markerer vinkelen og resonnerer at tangens til den spisse vinkelen er lik forholdet $\frac{motst.katet}{hosligg.katet} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ siden skjæringspunktene med aksene er (0, 4) og (8, 0).

Bruker kalkulator for å finne at $\arctan\frac{1}{2} \approx 63{,}4°$. En slik føring får 3p. Kan få opp til 3 p. hvis finner verdi til den stumpe vinkelen og resonnere at $stig.tall = \tan\alpha$, altså $\tan\alpha = -2$ som dannes mellom *x*-aksen og linja, hvis vi starter fra *x*-aksen i retning mot urviseren. Andre alternative løsninger vurderes på skjønn.

Oppgave 6 (4 + 4 = 8 %)



a) Ta utgangpunkt i dette bilde for å vise utledning av arealsetningen.



b) Fire kongruente rettvinklete trekanter er satt sammen som det vises på bildet. Vis Pytagoras setning ved å ta utgangpunkt i dette bildet.

Løsningsforslag:

a) 4 p. for komplett føring med tilstrekkelig argumentasjon, manglende argumentasjon trekker ned til 1-3 p.

Forslag: arealformelen som er kjent tidligere er $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$

Hvis vi fokuserer på den rettvinklede trekanten, så ifølge sinus definisjon er

$$\sin \alpha = \frac{h}{b}$$

Uttrykker: $h = \sin \alpha \cdot b$

og setter inn formelen: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sin \alpha \cdot b = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$

b) 4 p. for komplett føring med tilstrekkelig argumentasjon, manglende argumentasjon trekker ned til 1-3 p.

Forslag: Arealet til det store kvadratet dannes ved å sette sammen 4 kongruente rettvinklede trekanter og det lille kvadratet inne med sidelengde $(b - a)$. Skriver dette algebraisk:

$$c^2 = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + (b - a)^2$$

Forenkler HS (bruker 2. kvadratsetning der):

$$4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + (b - a)^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2 = b^2 + a^2 = a^2 + b^2$$

Fikk at $c^2 = a^2 + b^2$

Oppgave 7 3 + 3 + 4 + 4 = 14 %

Det er gitt følgende punkter i koordinatplanet:

$$A = (-1, 0), \qquad B = (4, -1), \qquad C = (3, 4), \qquad D = (-2, 5)$$

a) Hva slags figur danner punktene *A*, *B*, *C*, *D*? Begrunn svaret ved å referere til figurdefinisjon og utregninger som underbygger den.

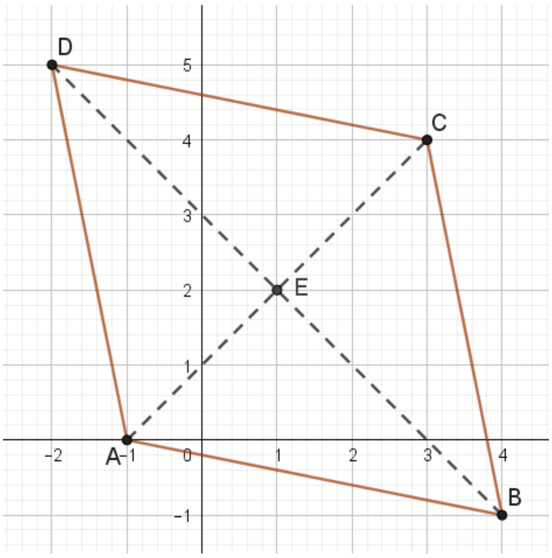
b) Konstruer diagonalene i din figur og marker skjæringspunktet mellom dem. Begrunn ved regning at skjæringspunktet deler hver av diagonalene i to like store deler.

c) Hvilken vinkel dannes det mellom diagonalene? Begrunn din antakelse ved regning.

d) Finn arealet til din figur.

Løsningsforslag:

a) Kandidaten løser og argumenterer korrekt, +3 p. Hvis viser kun utregning med sier ikke om definisjon +2 p. Kan gi 1 p. hvis navngir figur og vise til definisjon, men viser ikke utregninger.



Forslag:

Figuren er en rombe siden $AD||BC$ og $AB||DC$, samt alle linjestykkene er like lange. Kan bruke vektorregning for å begrunne for det:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = [5, -1]$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = [-1, 5]$$

$$AB = DC = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

$$AD = BC = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

b) 3 p. hvis viser utregning, manglende forklaring eller forklarer ved å peke på ruter gir 1-2 p. Skjæringspunkt mellom diagonaler i en rombe deler dem i like store deler. Vi bekrefter det ved å finne midtpunkt på begge diagonalene:

$$E = M_{AC} = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{4}{2}\right) = (1, 2)$$

$$E = M_{BD} = \left(\frac{4+(-2)}{2}, \frac{-1+5}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{4}{2}\right) = (1, 2)$$

c) 4 p for korrekt svar og tilstrekkelig argumentasjon, 2-3 p ved mangler i argumentasjon, 1 p. for antakelse fordi man «ser» det. Kandidaten kan vise en annen løsning enn i forslaget, vurderes på skjønn. Kan gi evt. full uttelling ved tilstrekkelig argumentasjon for sin løsning.

Forslag: Kan vise at det skal dannes en rett vinkel i punkt E ved å teste Pytagoras setning, f.eks. i trekanten DEC.

$\overrightarrow{DE} = [3, -3]$ og $DE = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$\overrightarrow{EC} = [2, 2]$ og $EC = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

$\overrightarrow{DC} = [5, -1]$ og $DC = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

$DE^2 + EC^2 = DC^2$ fordi $\left(\sqrt{18}\right)^2 + \left(\sqrt{8}\right)^2 = 18 + 8 = 26 = \left(\sqrt{26}\right)^2$

Lengdene oppfyller Pytagoras setning, derfor må det være en rettvinklet trekant.

d) 4 p for korrekt svar og tilstrekkelig argumentasjon, 2-3 p ved mangler i argumentasjon, 1 p. for å prøve å hente relevant teori uten å gjøre noe mer. Kandidaten kan vise en annen løsning enn i forslaget, vurderes på skjønn. Kan gi evt. full uttelling ved tilstrekkelig argumentasjon for sin løsning.

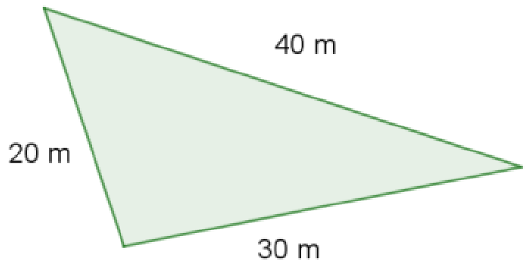
Forslag: Noen kan prøve å gå den lange veien ved å finne først cos verdi til en vinkel i rombe, og så deretter sinus verdi og anvende arealsetning – lite effektiv metode her. Kan finne areal til den ene rettvinklet trekant, og multiplisere med 4 siden det er 4 kongruente trekanter (SSS, alle har parvis like lange korresponderende sider).

$$A_{DEC} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot EC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{18 \cdot 8} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 8} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9 \cdot 16} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$$

Arealet til hele figuren ABCD blir da: $A = 4 \cdot A_{DEC} = 4 \cdot 6 = 24$

Oppgave 8   2 + 3 + 4 + 3 = 12 %

Erik har kjøpt en tomte som har trekant form. Han tok målinger langs tomtegrenser og noterte på en skisse. Erik vil finne ut hva arealet på den tomta er. Hans sønn Lars som går på 9. trinn mener at arealet skal være 300 m^2. Erik vil være sikker på det og ber Lars å ta med oppgaven på skolen i mattetimen for diskusjon.



a) Kunne du si at dette er en problemløsningsoppgave eller ikke? Argumenter (det holder med 1-2 setninger).
b) Du er læreren til Lars. Forklar hvordan han kan ha kommet frem til svaret. Hvilken tilbakemelding skulle du gi til Lars?
c) Du har blitt ivrig til å finne presis verdi til arealet, og vil prøve å løse den etter timene. Du husker at du hadde trigonometri en gang, og vil benytte dine kunnskaper. Finn den presise verdien av arealet.
d) Sammenlikn svaret du fikk i del c) med Lars sitt svar. Er det stor forskjell mellom svarene? Kommenter (det holder med 1-2 setninger).

Løsningsforslag:

a) Dette er en problemløsningsoppgave siden det finnes ikke noe gitt algoritme hva man skal gjøre, men må bygge løsningssti selv. 2 p for en tydelig forklaring, 1 p. for mangelfull.

b) 3 p. hvis «knekker» Lars sin tankegang og gir god tilbakemelding, f.eks. «Jeg ser at du brukte formelen for rettvinklet trekant ifølge ditt svar, altså $A = \frac{20 \cdot 30}{2} = 300\ m^2$. Så, du er sikker at dette er en rettvinklet trekant. Kanskje du vet en metode hvordan man kan sjekke om en tilfeldig trekant er rettvinklet eller ikke? Hvis du har skjønt hvilken setning jeg snakker om – kan du teste den for denne trekanten?» 1-2 p hvis ufullstendig forklaring eller tilbakemelding «Du tar feil» uten å si hvorfor.

c) 4 p. for korrekt svar uten avrundinger i mellomregning, altså det skal gis presist svar og tilstrekkelig forklaring / viser utregning. 3 p. hvis kommer frem til svaret, men viser avrundet verdi til cos og sinus, som påvirker svaret. 1 til 1,5 p hvis trekker inn relevant teori, men klarer ikke å regne. Vurderes på skjønn.

Forslag: anvende arealsetning, finne sinus verdi til en valgfri vinkel i trekanten, for å finne sinus verdi, må finne først cos verdi ved å bruke cos setningen.

Kaller den største vinkelen for α, den som er mellom sidene på 20 og 30 m, og ifølge cos setningen får at: $40^2 = 20^2 + 30^2 - 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot \cos\alpha$

$$1600 = 400 + 900 - 1200 \cdot \cos\alpha$$

$$1200 \cdot \cos\alpha = 400 + 900 - 1600$$

$1200 \cdot \cos\alpha = -300$ og $\cos\alpha = -\frac{300}{1200} = -\frac{1}{4}$

Bruker enhetsformelen for å finne $\sin\alpha$ verdi:

$(\sin\alpha)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 1$ og får at $(\sin\alpha)^2 = \frac{15}{16}$ og $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Viktig å peke på at sinus verdi for stumpe vinkler er fortsatt positiv.

Nå kan anvende arealsetningen: $A = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 30 \cdot \sin\alpha = 300 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 75\sqrt{15}\ m^2$

Viser kandidaten Herons setning for å beregne presis areal verdi, gis 4 p. Det er ikke pensum, men jeg har presentert denne formelen ved lignende oppgave.

d) 3 p. for å sammenlikne omtrent svar fra del c) med Lars sitt, og kommentere at liten forskjell forklares at vinkelen er «nesten» rett, og derfor sinus verdi er «nesten lik 1». Derfor ligger det presise svaret så nært Lars sitt svar. 2 p for kun forklaring uten å angi svaret. Kan evt. gi 1p. hvis kandidaten forsøker å trekke inn relevant teori, og +1 p. hvis mener at vinkelen ser nesten rett ut.

Forslag: bruker kalkulator for finner ca verdi: $75\sqrt{15} \approx 290{,}5\ m^2$ som ligger ikke så veldig langt unna Lars sitt svar, fordi hvis det hadde vært en riktig rettvinklet trekant, så skulle $\sin 90° = 1$. I del c) fikk vi at $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4} \approx 0{,}97$, derfor ble det så lite avvik.

Vedlegg med utvalgte formler og verdier

Abc-formelen for likningen $ax^2 + bx + c = 0$ $\qquad x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Derivasjon:

Definisjon av den deriverte: $\qquad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Derivasjonsregel: $\qquad (x^n)' = nx^{n-1}$

Tangentformel: $\qquad y - f(a) = f'(a)(x-a)$

Integrasjon:

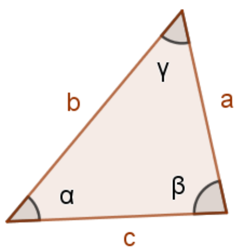
Ubestemte integraler: $\qquad \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad der\ n \neq 0$

Bestemte integraler: $\qquad \int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$

Trigonometriske verdier for spisse vinkler:

$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45° = 1$
$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$

Trigonometriske setninger:



Arealsetningen $\qquad A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$

Sinus setningen $\qquad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Cosinus setningen $\qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

Formler i trigonometri: $\qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$