SENSORVEILEDNING

Emnekode:	LMUMAT10420
Emnenavn:	MAT104: Algebra, funksjoner, geometri og måling II (5-10)
Eksamensform:	Individuelt, skriftlig eksamen
Dato:	11. mai 2023 9:00-15:00
Hjelpemidler:	Godkjent kalkulator, linjal, passer.
Faglærer(e):	Johan Bredberg Natalia Bredrup
Eventuelt: Sensorveiledningen består av 26 sider	

Innhold

Denne sensorveiledningen inneholder:

1. **Vurderingskriterier for den enkelte karakter**
2. **Viktige elementer for vurderingen**
3. **Oppgavene med stikkordsmessig løsningsforslag**

1. Vurderingskriterier for den enkelte karakter

	A	B	C	D	E	F
Generelle kriterier Kilde: https://www.uio.no/studier/eksamen/karakterskala/fagspesifikk-karakterbeskrivelse/mn-math.html#skriftlig	**Fremragende** prestasjon der kandidaten har løst problemer som krever fantasi og innsikt. Besvarelsen viser at kandidaten fullt ut behersker både de begrepsmessige, regnetekniske og anvendelsesmessige delene av emnet. Fremstillingen er klar og presis med korrekt bruk av notasjon og fagterminologi. Noen få mindre feil eller blanke punkter kan tillates.	**Meget god** prestasjon der kandidaten har løst problemer som går utover det rutinemessige, og som krever god oversikt over emnet. Besvarelsen viser meget god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset. Fremstillingen er klar og med stort sett riktig bruk av terminologi og notasjon.	**God** Gjennomsnittlig prestasjon der kandidaten har løst oppgaver av middels vanskelighetsgrad fra de fleste deler av kurset. Besvarelsen viser god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har ikke i særlig grad klart å anvende sine ferdigheter og kunnskaper på oppgaver som går ut over det rutinemessige. Fremstillingen er grei å forstå, men kan ha en del formelle mangler.	**Nokså god** Prestasjon under gjennomsnittet der kandidaten har løst eller kommet et stykke på vei med oppgaver fra flere sentrale deler av kurset. Besvarelsen viser kjennskap til de viktigste teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har vanskelig for å komme helt i mål selv på rutinepregede oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men kan ha en god del formelle mangler.	**Tilstrekkelig** Prestasjon som tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Besvarelsen viser at kandidaten har kjennskap til begreper, teknikker og anvendelser fra flere deler av kurset, og at han/hun til en viss grad kan bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men røper klare feil og misforståelser.	**Ikke bestått** Prestasjon som ikke tilfredsstiller minimumskravene. Besvarelsen viser at kandidaten har manglende kjennskap til sentrale teknikker, begreper og anvendelser, eller manglende evne til å bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Besvarelser som bare viser beherskelse av en avgrenset del av emnet, vil normalt havne i denne kategorien.
Prosent av besvarelsen som kan indikere karakter	[92% - 100 %]	[77% - 92 %>	[58% - 77%>	[46 % - 58%>	[40 % - 46%>	[0 % - 40%>

Universitets – og høgskolerådet har utformet disse generelle, kvalitative beskrivelsen av de ulike karakterene:

symbol	betegnelse	generell, ikke fagspesifikk beskrivelse av vurderingskriterier
A	fremragende	Fremragende prestasjon som klart utmerker seg. Kandidaten viser svært god vurderingsevne og stor grad av selvstendighet.
B	meget god	Meget god prestasjon. Kandidaten viser meget god vurderingsevne og selvstendighet.
C	god	Jevnt god prestasjon som er tilfredsstillende på de fleste områder. Kandidaten viser god vurderingsevne og selvstendighet på de viktigste områdene.
D	nokså god	En akseptabel prestasjon med noen vesentlige mangler. Kandidaten viser en viss grad av vurderingsevne og selvstendighet.
E	tilstrekkelig	Prestasjonen tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Kandidaten viser liten vurderingsevne og selvstendighet.
F	ikke bestått	Prestasjon som ikke tilfredsstiller de faglige minimumskravene. Kandidaten viser både manglende vurderingsevne og selvstendighet.

2. Viktige elementer for vurderingen

Nedenfor finnes forslag på løsninger. Det vil selvsagt være flere andre fremgangsmåter som kan gi full uttelling så her må det vurderes i hvert enkelt tilfelle. I gjennomgangen nedenfor er det indikert en maksimumspoengsum for hver av deloppgavene, men det er imidlertid av stor betydning med en helhetlig vurdering.

3. Oppgavene med løsningsforslag og kommentarer

Se nedenfor.

Oppgave 1 [2 + 2 + 2 + 3 = 9].

Alexander spiller et spill der han får røde og svarte kort. For hvert rødt kort taper han 4 kr og for hvert svart kort vinner han 6 kr. Han har totalt fått 12 stykker kort og gjennom dette fått en fortjeneste på 2 kr. Han lurer på hvor mange henholdsvis røde og svarte kort han har fått.

(a) Finn dette ut på en systematisk måte sånn at en elev på mellomtrinnet godt kan skjønne din løsning.

(b) Finn dette ut ved å lage et likningssystem og løse det med innsetningsmetoden [også kalt substitusjons-metoden].

(c) Løs ditt likningssystem fra del (b) ved hjelp av addisjonsmetoden [også kalt eliminasjons-metoden].

(d) Besvar Alexanders spørsmål ved hjelp av en grafisk tilnærming.

Kommentar.

(a) Her kan man lage en tabell, i sånn fall viktig at studenten er systematisk. Alternativt kan man f.eks. starte med å innse at bare røde kort fører til

$$12 \cdot (-4) = -48$$

kroner, og at hver gang ett rødt kort blir byttet mot ett svart kort øker penger med 10 kroner. Derfor må Alexander ha

$$\frac{50}{10} = 5$$

svarte og således 7 røde kort.

(b)

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ -4x + 6y = 2 \end{cases}$$

og første likningen gir

$$y = 12 - x$$

som fører til

$$-4x + 6(12 - x) = 2$$

og altså

$$10x = 72 - 2 = 70$$

og da blir antallet røde kort $x = 7$ og antallet svarte kort $y = 12 - 7 = 5$.

(c)

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ -4x + 6y = 2 \end{cases}$$

og legger man sammen 4 kopier av den første likningen med den andre likningen får man

$$10y = 50$$

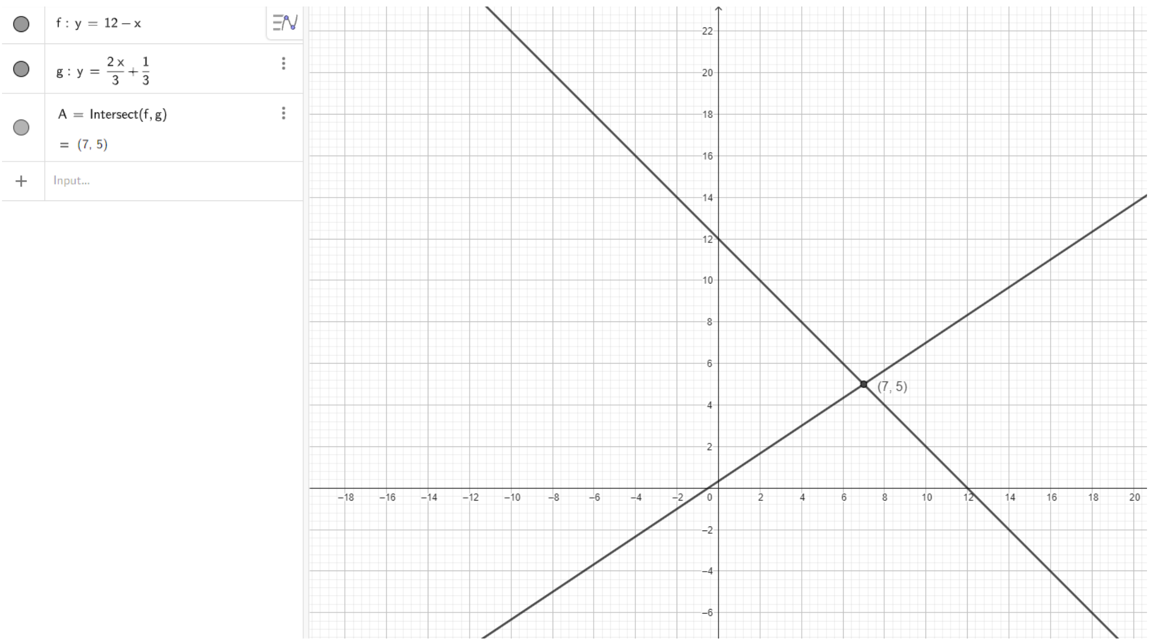
og da blir antallet svarte kort $y = 5$ og antallet røde kort $x = 12 - 5 = 7$.

(d) Enklest er nok å skrive om linjene som

$$y = -x + 12$$

og

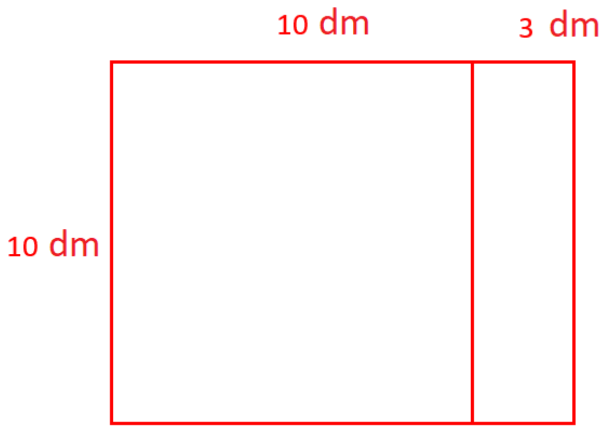
$$y = \frac{2}{3} \cdot x + \frac{1}{3}.$$



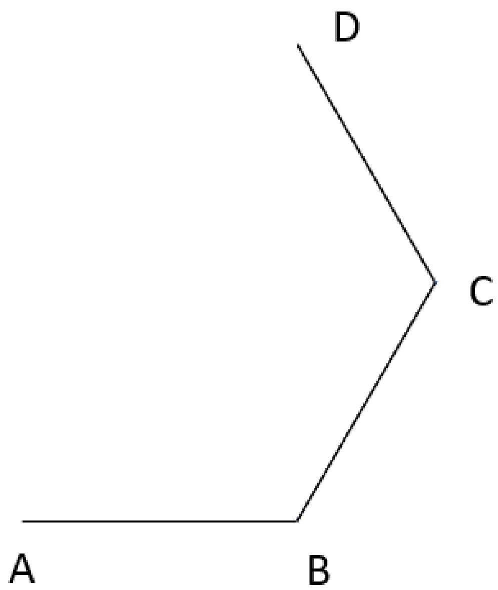
Linjene møtes i punktet $(x, y) = (7, 5)$ så der er $x = 7$ røde og $y = 5$ svarte kort.

Oppgave 2 [3 + 3 + 5 = 11].

(a) En elev har skrevet at figuren nedenfor har areal 103. Hva gir du som lærer for tilbakemelding til eleven?

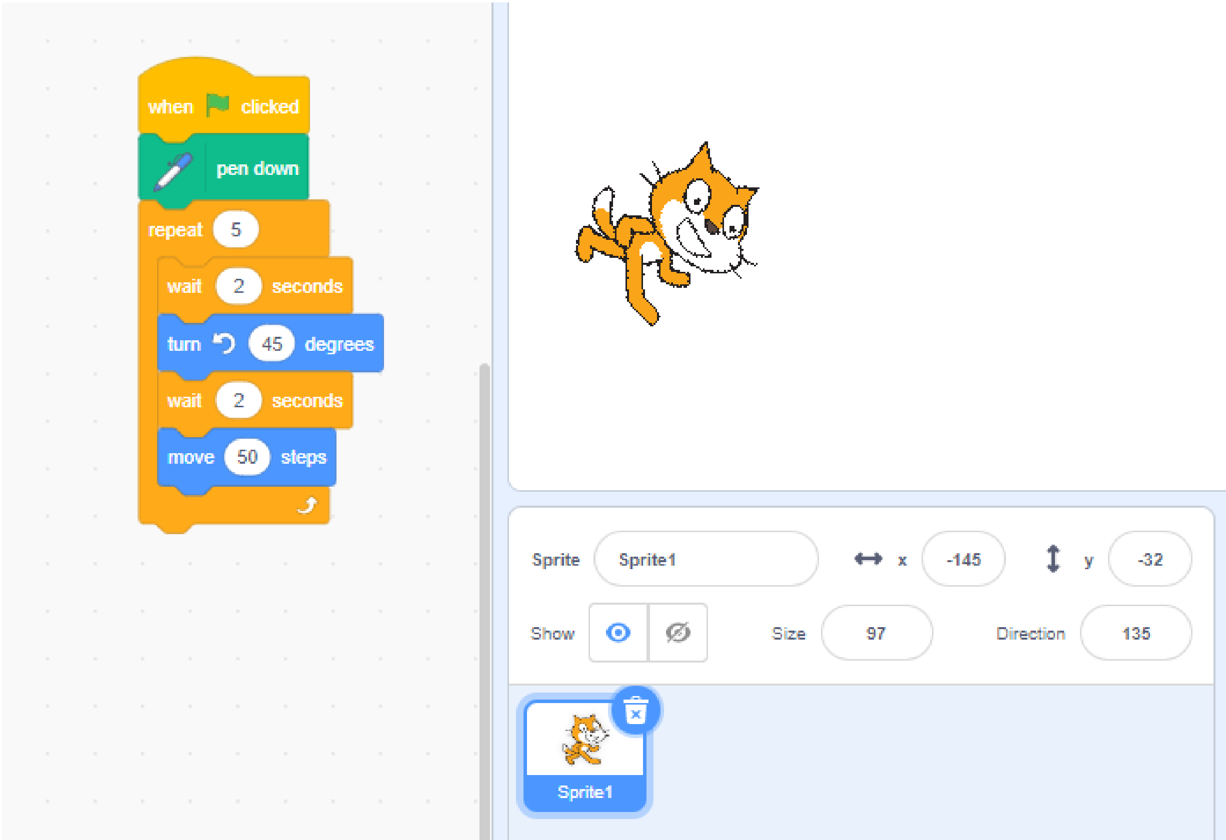


(b) En hund som starter i A går 1 steg til høyre for å komme til B. Så snur hunden 60° mot klokken for å så gå 1 steg og komme til C. Så snur hunden 60° mot klokken for å så gå 1 steg og komme til D.



Du skal finne vektoren $\overrightarrow{AD}$, der du som vanlig skal begrunne ditt svar.

(c) Katten, som jo tegner ved hjelp av en penn, er nå i sørøstlig retning.



(i) Tegn den figuren som dannes når du klikker på det grønne flagget.

(ii) Etter at du har klikket på flagget og katten har vandret som beskrevet, hvor mange “steps” befinner seg katten fra startpunktet?

Kommentar.

(a) Tekstforslag til eleven: Du har troligvis tenkt

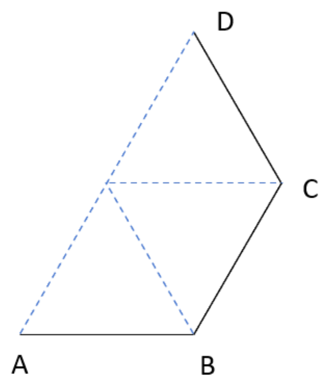
$$10 \cdot 10 + 3$$

istedenfor

$$10 \cdot (10 + 3).$$

Det første blir 103 mens det andre blir 130, så det er viktig med parenteser. Det riktige svaret er altså 130 dm^2. Husk også på at enhet må være med i svaret for at man skal forstå om det er snakk om f.eks. kvadratdesimeter eller kvadratmillimeter.

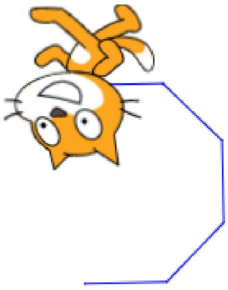
(b) Vi tar utgangspunkt i figuren nedenfor:



Da $180 - 60 = 120$ innser vi at vi ser på halvparten av en regulær hexagon med sidelengde 1. Videre vet vi at hexagonen kan deles inn i 6 stykker kongruente liksidige trekanter med sidelengde 1 fordi en slik trekant er likebeint grunnet symmetri og den siste vinkelen er $360/6 = 60$ grader. Ettersom $3 \cdot 60 = 180$, eller grunnet symmetri, forstår vi at linjesegmentet fra A til D går gjennom midtpunktet og derfor er lengden av AD lik 2. Således får vi at

$$\overrightarrow{AD} = 2(\cos 60, \sin 60) = (1, \sqrt{3}).$$

Det finnes mange alternative framgangsmåter! Alle korrekte alternativ er ok, men kandidaten må begrunne sine antakelser.



(c) (i)

(ii) Da vi beveger oss henholdsvis 0, 45, 90, 135 og 180 grader med x-aksen og like langt hver gang, blir den totale bevegelsen i horisontal retning ikke noe als. Når vi går snett oppover så går vi

$$x^2 + x^2 = 50^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{50}{\sqrt{2}}$$

steps oppover. Så vi har beveget oss

$$50 + 2 \cdot \frac{50}{\sqrt{2}} = 50 + 50\sqrt{2}$$

steps oppover. Svaret er altså

$$50 + 50\sqrt{2}$$

steps.

Oppgave 3 [2 + 3 + 2 + 2 + 2 = 11].

(a) Vektorene $\vec{u} = [-2, 0]$ og $\vec{v} = [-3, 4]$ er gitt.

(i) Tegn vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{u} + \vec{v}$.

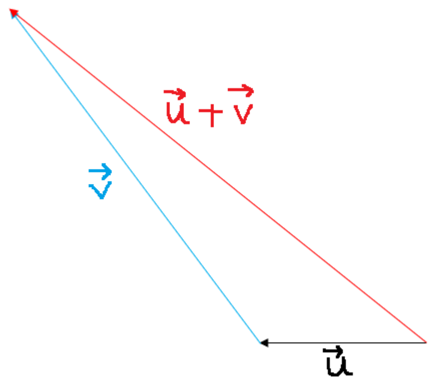
(ii) Finn vektorlengdene $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ og $\|\vec{u} + \vec{v}\|$, og kommenter resultatet ved å bruke en geometrisk tilnærming.

(b) (i) Konstruer en spiss vinkel α sånn at $\tan\alpha = 2$.

(ii) Finn verdiene til $\sin\alpha$ og $\cos\alpha$.

(iii) Vis hvordan du kunne finne $\tan\alpha$ hvis det var gitt kun $\sin\alpha$ og $\cos\alpha$ verdiene som i del (ii).

Kommentar.



(a) (i)

(ii)

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$$

er mindre eller lik

$$\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = 2 + \sqrt{9+16} = 2+5 = 7$$

ettersom

$$41 \leq 7^2 = 49.$$

Geometrisk sier triangelulikheten

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

at en side i en trekant ikke kan være lengre enn summen av de andre to sidene [se figuren ovenfor].

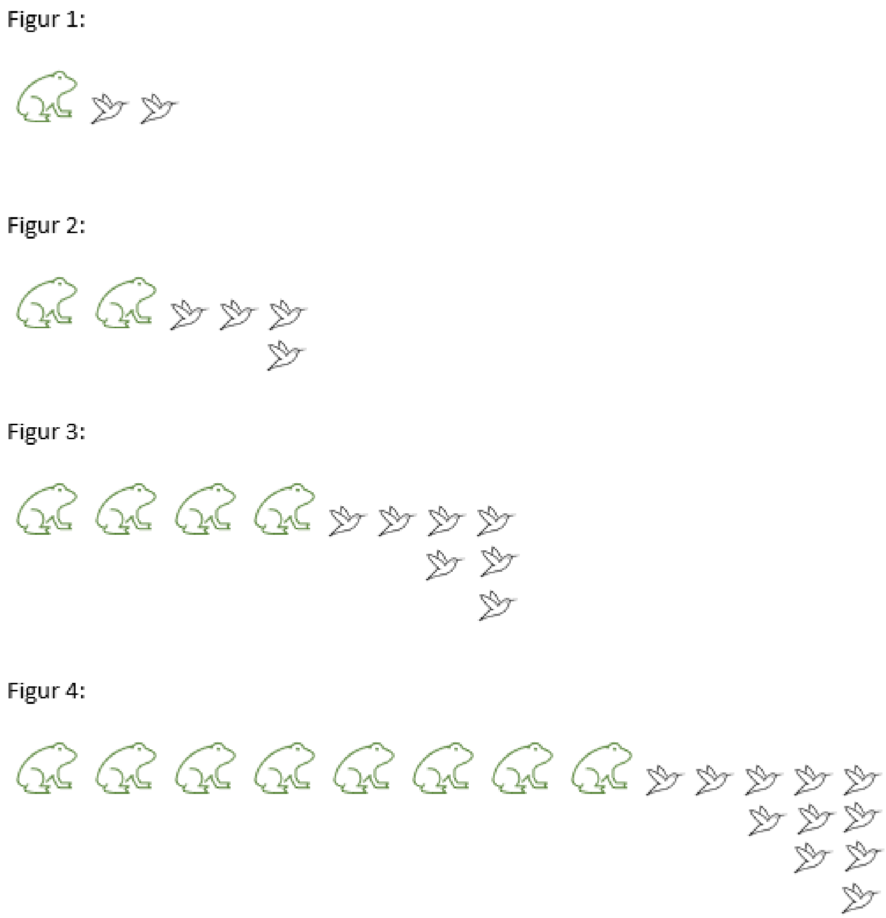
(b) (i) Du kan tegne en rettvinklet trekant med kateter 1 og 2. Da satisfiserer jo vinkelen α mellon 1-kateten og hypotenusen at $\tan\alpha = 2$.

(ii) Hypotenusen er $\sqrt{5}$ ifølge Pythagoras. Så $\cos\alpha = 1/\sqrt{5}$ og $\sin\alpha = 2/\sqrt{5}$. Om kandidater i stedet bruker enhetssirkelen så kan de, gitt at det er riktig gjort, få to av to poeng her selv om svarene ikke er eksakte da dette viser forståelse av enhetssirkelen.

(iii) Vi kan bruke $\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha = (2/\sqrt{5})/(1/\sqrt{5}) = 2$.

Oppgave 4 [2 + 2 + 4 + 2 = 10].

Nedenfor finnes et mønster:



(a) Beskriv med ord hvordan mønsteret dannes.

(b) Hvor mange dyr kommer det til å være totalt i henholdsvis Figur 5 og 6?

(c) Finn en formel [vis din vei fram til den] for totale antallet dyr i Figur N.

(d) Kan man arbeide med å studere slike mønster og tallfølger på mellomtrinnet? Om du mener nei, begrunn hvorfor ikke. Om du mener ja, beskriv hvordan og hva poenget kan være med å gjøre dette.

Kommentar.

(a) Froskene dobles hver gang og fuglene er trekantstallene pluss 1.

(b) Frosker er henholdsvis $2^4 = 16$ og $2^5 = 32$.
Fuglene er henholdsvis $1 + 2 + \ldots + 5 + 1 = 16$ og $1 + 2 + \ldots + 6 + 1 = 22$.
Så antallet dyr er henholdsvis 32 og 54.

(c) Dyr i Figur N blir

$$2^{N-1} + 1 + \frac{N(N+1)}{2} = 2^{N-1} + \frac{N^2 + N + 2}{2},$$

der vi brukte trekantstallsformelen

$$1 + 2 + 3 + \ldots + N = \frac{N(N+1)}{2}.$$

(d) Ja. Poenget er at man godt kan arbeide med mønster og algebraisk tankegang innenfor mange ulike temaer i matematikk. Dette får elever på mellomtrinnet til å reflektere over strukturer innenfor matematikk, og hjelper dem å forstå algebra med bokstaver når den tiden kommer.

Oppgave 5 [5 + 9 + 2 = 16].

(a) En ungdomsskolelærer sier til sine elever at hun tenkte på et tall, multipliserte det med 7, adderte 3 og tok resultatet opphøyd i tre. Da fikk hun 1000. Så spør hun elevene om de kan finne ut hva hun kan ha tenkt på for tall opprinnelig. Adalmina sier at hun bare resonnerte seg fram til svaret ved å tenke baklengs, mens Bengt løste oppgaven ved hjelp av en likning. Forklar hvordan Adalminas og Bengts løsninger kan ha sett ut, og kommenter hvorvidt de har noe felles eller ikke?

(b) Løs likningen

$$x^2 + 6x - 40 = 0$$

ved hjelp av:

(i) *abc*-formelen

(ii) faktorisering

(iii) fullstendige kvadraters metode [fullføring av kvadrat].

(c) Forklar hvorfor det kan være bra og nyttig å ha kjennskap til alle de tre metodene fra del (b).

Kommentar.

(a) Adalmina tenker baklengs fra 1000 til 10 til 7 til 1.

Bengt tenker at svaret er x. Gjennom å tenke x til $7x$ til $7x+3$ til $(7x+3)^3$ får han likningen

$$(7x+3)^3 = 1000.$$

Da blir

$$7x + 3 = \sqrt[3]{1000} = 10$$

og da blir

$$7x = 7$$

og

$$x = 1.$$

Løsningene har mye til felles, da stegene Bengt gjør for å løse sin likning egentlig er de samme som Adalmina gjør.

(b) Vi ser altså på

$$x^2 + 6x - 40 = 0.$$

(i)

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{-6 \pm 14}{2} = -3 \pm 7.$$

(ii) Vi søker to tall hvis produkt er -40 og sum er 6. Faktoriseringen

$$(x+10)(x-4) = 0$$

fører til $x_1 = -10$ og $x_2 = 4$.

(iii)

$$x^2 + 6x + 9 = 49$$

og

$$(x + 3)^2 = 49$$

gir

$$x + 3 = \pm 7$$

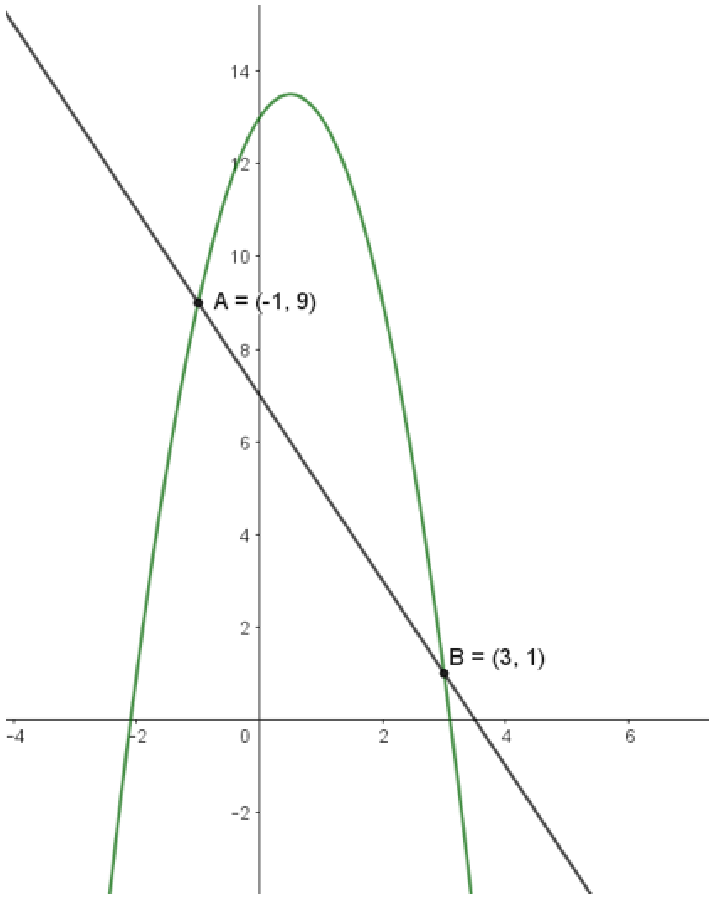
som gir

$$x = -3 \pm 7.$$

(c) Dels gir ulike perspektiver en dybere forståelse av matematikken og dels finnes det ulike fordeler med metodene. ABC er enkel, faktorisering kan gi en rask løsning og kvadratkomplettering er historien bak ABC og ulike andre ting i matematikk.

Oppgave 6 [3 + 1 + 2 + 2 + 4 = 12].

I bildet nedenfor ser du grafen til $f(x) = -2x^2+2x+13$ samt punktene $A = (-1, 9)$ og $B = (3, 1)$.



(a) Finn likningen til linjen som går gjennom punktene A og B.

(b) Finn koordinatene til midpunktet på linjestykket AB.

(c) Ligger midtpunktet du fant i del (b) på symmetrilinjen til parabelen?

(d) Som du ser på bildet, danner linjen og parabelen et område i planet. Anslå dette områdets areal ved hjelp av ungdomsskole-matematikk.

(e) Beregn den eksakte størrelsen på området [dannet av linjen og parabelen].

Kommentar.

(a) Stigningstallet er

$$\frac{1-9}{3-(-1)} = -2$$

så likningen til linjen blir

$$y - 9 = -2(x - (-1))$$

eller med andre ord

$$y = -2x + 7.$$

(b) Midtpunktet er

$$(\frac{-1+3}{2}, \frac{9+1}{2}) = (1, 5).$$

(c) Midtpunktets x-koordinat er 1 mens symmetrilinjen skjer der

$$x = -\frac{b}{2a} = 0.5$$

så svaret er nei. Symmetrilinjen kan alternativt bli funnet på andre måter.

(d) Man kan *for eksempel* argumentere for at området er omtrent like stort som et rektangel med hjørner i $(0, 4)$, $(2, 4)$, $(2, 14)$ og $(0, 14)$. Dets størrelse er jo 20 arealenheter.

(e)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} -2x^2 + 2x + 13 - (-2x + 7)\, dx &= \int_{-1}^{3} -2x^2 + 4x + 6\, dx \\ &= \Big[-\frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 6x \Big]_{-1}^{3} \\ &= -18 + 18 + 18 - (\frac{2}{3} + 2 - 6) = \frac{64}{3} \approx 21.\end{aligned}$$

Oppgave 7 [2 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 = 15].

Hele denne oppgaven handler om en trekant med sidelengdene 5 cm, 5 cm og 6 cm.

(a) Vis hvordan du kan konstruere trekanten, dersom du kan bruke passer og linjal med målenheter.

(b) Finn arealet til trekanten.

(c) Finn cosinus-verdien til den største vinkelen i trekanten.

(d) Finn sinus-verdien til den største vinkelen i trekanten.

(e) Bevis at for trekantens areal A gjelder følgende areal-formel:

$$A = p \cdot r$$

der p er halvparten av trekantens omkrets og r er radiusen til sirkelen som er innskrevet i trekanten.

(f) Hva er radiusen til sirkelen som er innskrevet i trekanten?

Kommentar.

(a) Lag et linjesegment med lengde 6 cm. Så tegner du sirkler med radius 5 cm fra endepunktene — du får et tredje punkt i din trekant. Alternativt kan du lage midtpunktsnormalen til ditt 6 cm lange linjesegment. Gå opp 4 cm på dette. Da blir ifølge Pythagoras de andre to sidene $\sqrt{9+16} = 5$ cm.

(b) Se det som to kongruente $3-4-5$ trekanter. Høyden er altså 4 cm. Dermed blir arealet $4 \cdot 6/2 = 12$ cm^2. Alternativt kan studenter løse del (c) og (d) først for å så bruke dem til å løse del (b).

(c) Største vinkelen er mot største siden. Cosinussetningen gir

$$6^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos x \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{7}{25}.$$

(d) Største vinkelen er mot største siden. Man kan bruke arealet:

$$12 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin x \quad \Rightarrow \quad \sin x = 24/25.$$

Alternativt bruker man (c) og får

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \frac{49}{625}} = \sqrt{\frac{576}{625}} = \frac{24}{25}.$$

(e) Drag linjestykker til inskrevne sirkelens sentrum. I hver av de tre trekantene kan du bruke at arealet er grunnlinjen multiplisert med høyden [les r] delt på 2. Summerer vi dette får vi

$$\text{Areal } = pr.$$

(f)

$$pr = 12 \quad \Rightarrow \quad r = 12/p = 24/(5+5+6) = 24/16 = 1.5 \quad [\text{cm}].$$

Oppgave 8 [1 + 4 + 1 + 2 + 4 + 4 = 16].

En robot beveger seg slik at dens høyde i meter over vannflaten etter t timer fra nå er beskrevet av følgende funksjon:

$$f(t) = t^3 - 42t^2 + 441t - 400, \quad 0 \leq t \leq 24.$$

(a) Hva er høyden akkurat nå?

(b) Pelle er interessert i når roboten kommer til å krysse vannflaten [altså gå fra å være oppe i luften til å være nede i havet, eller motsatt]. Hjelp Pelle med å finne ut når roboten kommer til å krysse vannflaten!

(c) Etter å ha gjort noen beregninger konkluderte Pelle at roboten kommer til å krysse vannflaten om henholdsvis 1, 16 og 25 timer. Begrunn hvorfor ett av disse tidspunktene ikke er gyldig.

(d) Hva er den momentane endringshastigheten til høyden akkurat nå?

(e) Bestem eventuelle lokale maks- og minpunkter til f.

(f) Skisser grafen til funksjonen f. På skissen kan det selvfølgelig være relevant å markere ut det du har funnet ut i de tidligere deloppgavene.

Kommentar.

(a) Høyden er nå

$$f(0) = -400$$

meter.

(b) Vi må løse

$$t^3 - 42t^2 + 441t - 400 = 0.$$

Vi kan se at 1 er en rot. Ifølge Faktorteoremet kan vi faktorisere ut $(x - 1)$. Ved hjelp av [for eksempel] langdivisjon finner vi faktoriseringen

$$(t - 1)(t^2 - 41t + 400) = 0$$

og vi får at enten så er

$$t - 1 = 0$$

eller så er

$$t^2 - 41t + 400 = 0 \quad \Leftrightarrow (t - 16)(t - 25) = 0$$

så roboten krysser vannflaten etter 1 time og etter 16 timer. Alternativt kan studenter bruke del (c), men svar må som vanlig begrunnes.

(c) Tidspunktet om 25 timer er ikke gyldig da modellen bare er gyldig i 24 timer fra og med nå.

(d) Ettersom

$$f'(t) = 3t^2 - 84t + 441$$

blir

$$f'(0) = 441$$

så svaret er 441 meter/time.

(e) Den deriverte er en positiv parabel med nullpunkter der

$$t^2 - 28t + 147 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t-7)(t-21) = 0.$$

Den deriverte er altså $+0-0+$ som forteller oss at 7 er et lokalt makspunkt og 21 er et lokalt minpunkt.

(f) Her er en skisse av grafen til

$$f(t) = t^3 - 42t^2 + 441t - 400, \quad 0 \le t \le 24.$$