

EKSAMEN

Emnekode: LMUMAT10420	Emnenavn: MAT104: Algebra, funksjoner, geometri og måling II (5-10)
Dato: 11.05.2023	Eksamenstid: Kl. 9.00 – 15.00
Hjelpemidler: Godkjent kalkulator.	Faglærere: Johan Bredberg Natalia Bredrup
Om eksamensoppgaven og poengberegning: Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene. Oppgavesettet består av tolv sider inklusiv denne forsiden og vedlegg. Oppgavesettet består av 8 oppgaver. Oppgavene er ulikt vektet (se antall prosent i parentes). Begrunn og forklar tydelig og grundig på hver av oppgavene. Lykke til!	
Sensurfrist: 1 juni 2023 Karakterene er tilgjengelige for studenter på Studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. www.hiof.no/studentweb	

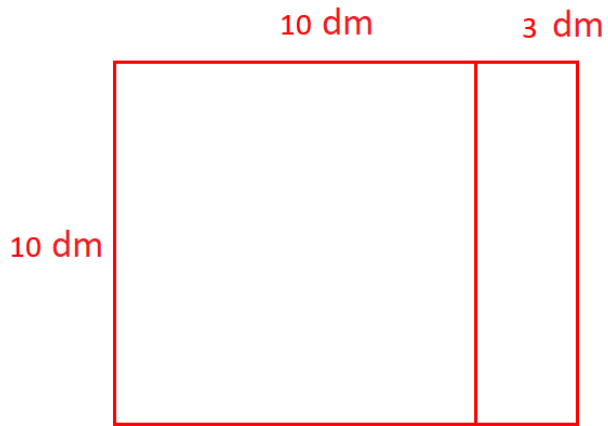
Oppgave 1 [2 + 2 + 2 + 3 = 9].

Alexander spiller et spill der han får røde og svarte kort. For hvert rødt kort taper han 4 kr og for hvert svart kort vinner han 6 kr. Han har totalt fått 12 stykker kort og gjennom dette fått en fortjeneste på 2 kr. Han lurer på hvor mange henholdsvis røde og svarte kort han har fått.

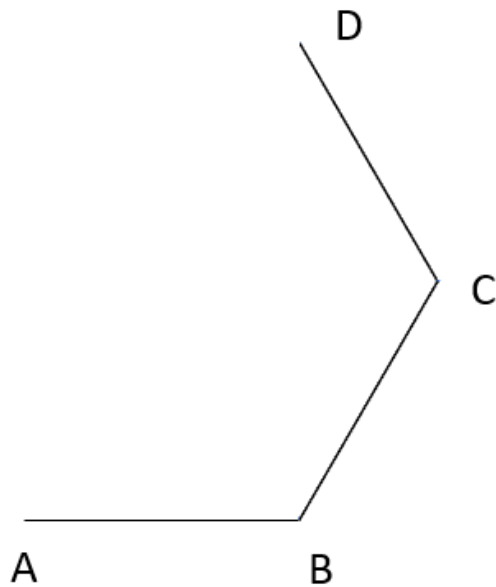
- (a) Finn dette ut på en systematisk måte sånn at en elev på mellomtrinnet godt kan skjønne din løsning.
- (b) Finn dette ut ved å lage et likningssystem og løse det med innsetningsmetoden [også kalt substitusjonsmetoden].
- (c) Løs ditt likningssystem fra del (b) ved hjelp av addisjonsmetoden [også kalt eliminasjonsmetoden].
- (d) Besvar Alexanders spørsmål ved hjelp av en grafisk tilnærming.

Oppgave 2 [3 + 3 + 5 = 11].

- (a) En elev har skrevet at figuren nedenfor har areal 103. Hva gir du som lærer for tilbakemelding til eleven?

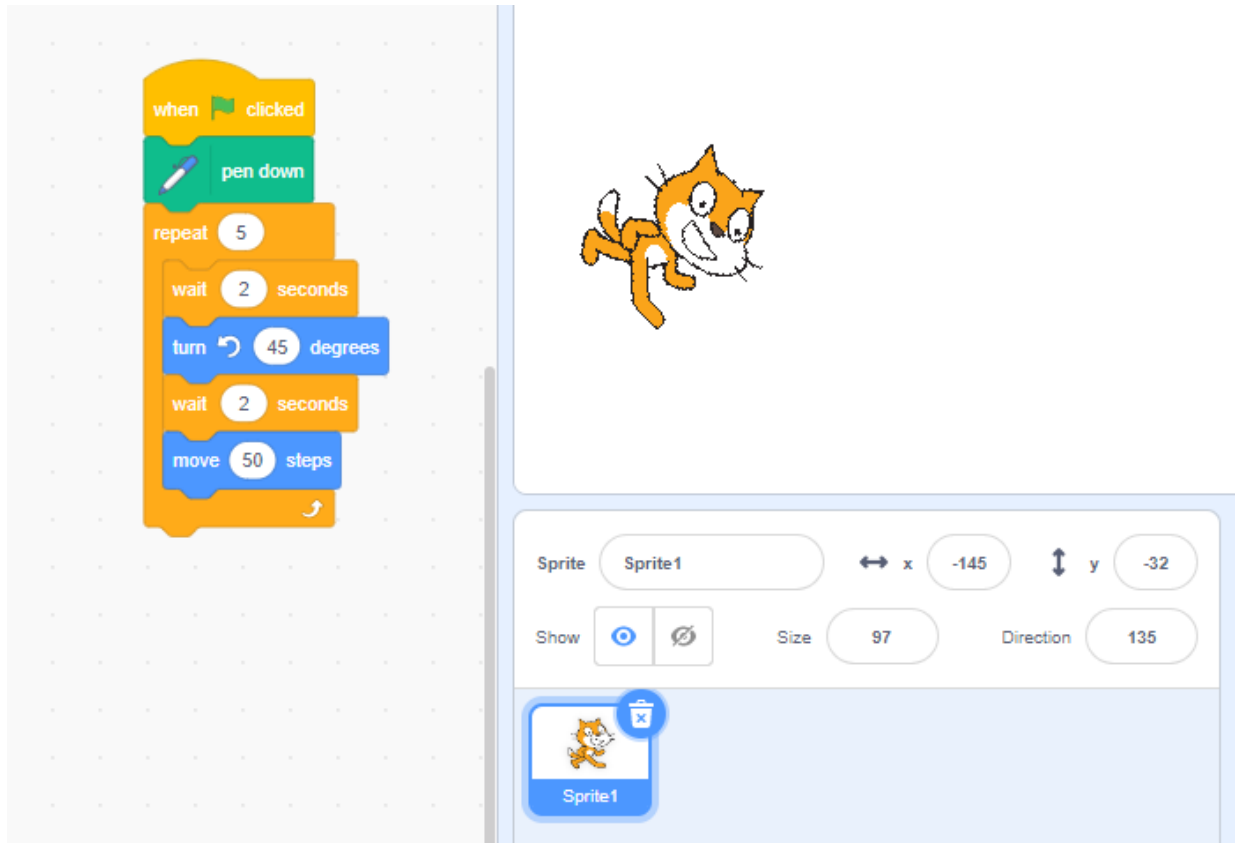


- (b) En hund som starter i A går 1 steg til høyre for å komme til B . Så snur hunden 60° mot klokken for å så gå 1 steg og komme til C . Så snur hunden 60° mot klokken for å så gå 1 steg og komme til D .



Du skal finne vektoren \overrightarrow{AD} , der du som vanlig skal begrunne ditt svar.

(c) Katten, som jo tegner ved hjelp av en penn, er nå i sørøstlig retning.



- (i) Tegn den figuren som dannes når du klikker på det grønne flagget.
- (ii) Etter at du har klikket på flagget og katten har vandret som beskrevet, hvor mange “steps” befinner seg katten fra startpunktet?

Oppgave 3 [2 + 3 + 2 + 2 + 2 = 11].

(a) Vektorene $\vec{u} = [-2, 0]$ og $\vec{v} = [-3, 4]$ er gitt.

(i) Tegn vektorene \vec{u} , \vec{v} og $\vec{u} + \vec{v}$.

(ii) Finn vektorlengdene $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ og $\|\vec{u} + \vec{v}\|$, og kommenter resultatet ved å bruke en geometrisk tilnærming.

(b) (i) Konstruer en spiss vinkel α sånn at $\tan \alpha = 2$.

(ii) Finn verdiene til $\sin \alpha$ og $\cos \alpha$.

(iii) Vis hvordan du kunne finne $\tan \alpha$ hvis det var gitt kun $\sin \alpha$ og $\cos \alpha$ verdiene som i del (ii).

Oppgave 4 [$2 + 2 + 4 + 2 = 10$].

Nedenfor finnes et mønster:

Figur 1:



Figur 2:



Figur 3:



Figur 4:



- (a) Beskriv med ord hvordan mønsteret dannes.
- (b) Hvor mange dyr kommer det til å være totalt i henholdsvis Figur 5 og 6?
- (c) Finn en formel [vis din vei fram til den] for totale antallet dyr i Figur N .
- (d) Kan man arbeide med å studere slike mønster og tallfølger på mellomtrinnet? Om du mener nei, begrunn hvorfor ikke. Om du mener ja, beskriv hvordan og hva poenget kan være med å gjøre dette.

Oppgave 5 [5 + 9 + 2 = 16].

(a) En ungdomsskolelærer sier til sine elever at hun tenkte på et tall, multipliserte det med 7, adderte 3 og tok resultatet opphøyd i tre. Da fikk hun 1000. Så spør hun elevene om de kan finne ut hva hun kan ha tenkt på for tall opprinnelig. Adalmina sier at hun bare resonnerer seg fram til svaret ved å tenke baklengs, mens Bengt løste oppgaven ved hjelp av en likning. Forklar hvordan Adalminas og Bengts løsninger kan ha sett ut, og kommenter hvorvidt de har noe felles eller ikke?

(b) Løs likningen

$$x^2 + 6x - 40 = 0$$

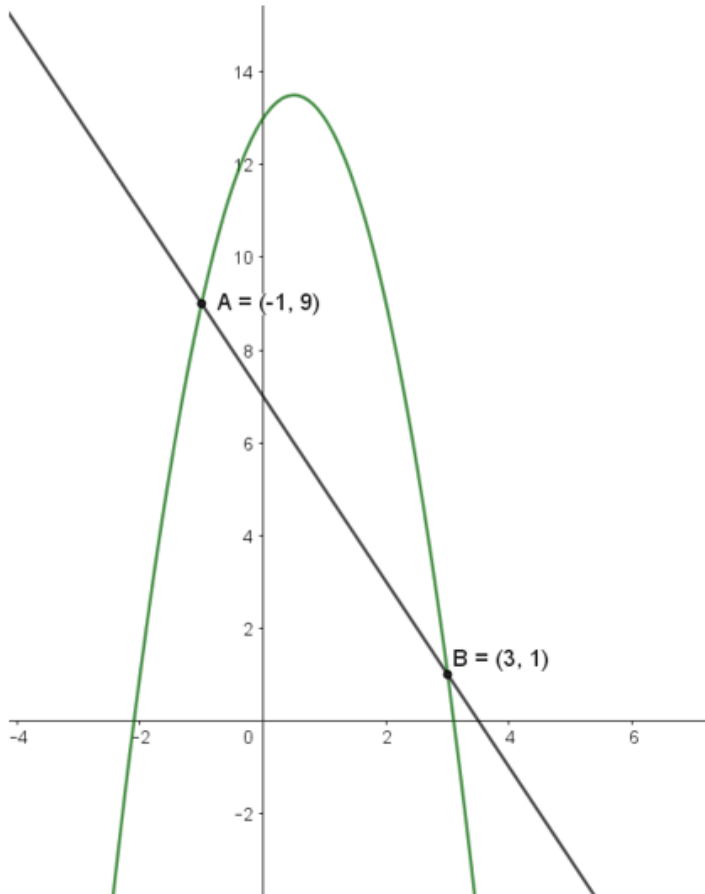
ved hjelp av:

- (i) *abc*-formelen
- (ii) faktorisering
- (iii) fullstendige kvadraters metode [fullføring av kvadrat].

(c) Forklar hvorfor det kan være bra og nyttig å ha kjennskap til alle de tre metodene fra del (b).

Oppgave 6 [3 + 1 + 2 + 2 + 4 = 12].

I bildet nedenfor ser du grafen til $f(x) = -2x^2 + 2x + 13$ samt punktene $A = (-1, 9)$ og $B = (3, 1)$.



- Finn likningen til linjen som går gjennom punktene A og B .
- Finn koordinatene til midpunktet på linjestykket AB .
- Ligger midtpunktet du fant i del (b) på symmetrilinjen til parabelen?
- Som du ser på bildet, danner linjen og parabelen et område i planet. Anslå dette områdets areal ved hjelp av ungdomsskole-matematikk.
- Beregn den eksakte størrelsen på området [dannet av linjen og parabelen].

Oppgave 7 [2 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 = 15].

Hele denne oppgaven handler om en trekant med sidelengdene 5 cm, 5 cm og 6 cm.

- (a) Vis hvordan du kan konstruere trekanten, dersom du kan bruke passer og linjal med målenheter.
- (b) Finn arealet til trekanten.
- (c) Finn cosinus-verdien til den største vinkelen i trekanten.
- (d) Finn sinus-verdien til den største vinkelen i trekanten.
- (e) Bevis at for trekantens areal A gjelder følgende areal-formel:

$$A = p \cdot r$$

der p er halvparten av trekantens omkrets og r er radiusen til sirkelen som er innskrevet i trekanten.

- (f) Hva er radiusen til sirkelen som er innskrevet i trekanten?

Oppgave 8 [1 + 4 + 1 + 2 + 4 + 4 = 16].

En robot beveger seg slik at dens høyde i meter over vannflaten etter t timer fra nå er beskrevet av følgende funksjon:

$$f(t) = t^3 - 42t^2 + 441t - 400, \quad 0 \leq t \leq 24.$$

- (a) Hva er høyden akkurat nå?
- (b) Pelle er interessert i når roboten kommer til å krysse vannflaten [altså gå fra å være oppe i luften til å være nede i havet, eller motsatt]. Hjelp Pelle med å finne ut når roboten kommer til å krysse vannflaten!
- (c) Etter å ha gjort noen beregninger konkluderte Pelle at roboten kommer til å krysse vannflaten om henholdsvis 1, 16 og 25 timer. Begrunn hvorfor ett av disse tidspunktene ikke er gyldig.
- (d) Hva er den momentane endringshastigheten til høyden akkurat nå?
- (e) Bestem eventuelle lokale maks- og minpunkter til f .
- (f) Skisser grafen til funksjonen f . På skissen kan det selvfølgelig være relevant å markere ut det du har funnet ut i de tidligere deloppgavene.

Vedlegg med utvalgte formler og verdier

Abc-formelen: Likningen $ax^2 + bx + c = 0$ har løsningene $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ettpunktsformelen: Linjen gjennom (x_1, y_1) med stigningstall a har likning

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

Faktorteoremet: L er en rot til polynomet $p(x)$ hvis og bare hvis $(x - L)$ er en faktor i $p(x)$.

Aritmetisk rekke:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) \cdot n$$

Geometrisk rekke:

$$a + ar + \dots + ar^n = a \cdot \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

Derivasjon:

Definisjon av den deriverte: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Derivasjonsregel: $(x^n)' = nx^{n-1}$

Tangentformel: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

Integrasjon:

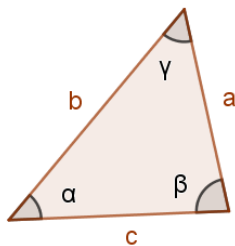
Ubestemte integraler: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ der $n \neq -1$

Bestemte integraler: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Trigonometriske verdier for spisse vinkler:

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

Trigonometriske setninger:



Arealsetningen

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

Sinus setningen

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Cosinus setningen

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Trigonometriske identiteter:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$