Høgskolen i Østfold

MAT103

Algebra, funksjoner og geometri II

1-7

SENSORVEILEDNING

1) Vurderingskriterer side 2 og 3.
2) Eksamensoppgaven med løsningsforslag side 4 til og med 15.

Den inneholder fasit og forslag eller kommentarer til ulike fremgangsmåter.

Generelt skal studentene begrunne alle sine svar.

En didaktikk oppgave er gitt. Det er viktig at elevene får frem sin forståelse fremfor om alle punktene er med.

Høgskolen i Østfold

Fagspesifikke karakterbeskrivelser:
Beskrivelsen under er veiledende i forhold til å sette karakter, derfor må besvarelsen også vurderes i sin helhet.

Symbol	Betegnelse	Beskrivelse
A	Fremragende	Generelt: Fremragende prestasjon der kandidaten har løst problemer som krever fantasi og innsikt. Besvarelsen viser at kandidaten fullt ut behersker både de begrepsmessige, regnetekniske og anvendelsesmessige delene av emnet. Fremstillingen er klar og presis med korrekt bruk av notasjon og fagterminologi. Noen få mindre feil eller blanke punkter kan tillates. Klart ca 95% av besvarelsen
B	Meget god	Generelt: Meget god prestasjon der kandidaten har løst problemer som går utover det rutinemessige, og som krever god oversikt over emnet. Besvarelsen viser meget god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset. Fremstillingen er klar og med stort sett riktig bruk av terminologi og notasjon. Klart ca 80% av besvarelsen
C	God	Generelt: Gjennomsnittlig prestasjon der kandidaten har løst oppgaver av middels vanskelighetsgrad fra de fleste deler av kurset. Besvarelsen viser god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har ikke i særlig grad klart å anvende sine ferdigheter og kunnskaper på oppgaver som går ut over det rutinemessige. Fremstillingen er grei å forstå, men kan ha en del formelle mangler. Klart ca 60% av besvarelsen
D	Nokså god	Generelt: Prestasjon under gjennomsnittet der kandidaten har løst eller kommet et stykke på vei med oppgaver fra flere sentrale deler av kurset. Besvarelsen viser kjennskap til de viktigste teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har vanskelig for å komme helt i mål selv på rutinepregede oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men kan ha en god del formelle mangler. Klart ca 47% av besvarelsen

E	Tilstrekkelig	Generelt: Prestasjon som tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Besvarelsen viser at kandidaten har kjennskap til begreper, teknikker og anvendelser fra flere deler av kurset, og at han/hun til en viss grad kan bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men røper klare feil og misforståelser. Klart ca 40% av besvarelsen
F	Ikke bestått	Generelt: Prestasjon som ikke tilfredsstiller minimumskravene. Besvarelsen viser at kandidaten har manglende kjennskap til sentrale teknikker, begreper og anvendelser, eller manglende evne til å bruke sine kunnskapene til å løse oppgaver. Besvarelser som bare viser beherskelse av en avgrenset del av emnet, vil normalt havne i denne kategorien.

Høgskolen i Østfold

EKSAMEN

SENSORVEILEDNING

Emnekode:	**Emnenavn:**
LMBMAT10320-1 23V	**MAT103 Algebra, funksjoner og geometri II (1-7)**
Dato: 16. mai 2023	**Eksamenstid:** 09:00 – 15:00
Hjelpemidler: Numerisk kalkulator	**Faglærere:** Ali Ludvigsen Audun Rojahn Olafsen

Om eksamensoppgaven og poengberegning:

Oppgavesettet består av **6** sider inklusiv denne forsiden.

Kontroller at oppgaven er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

6 oppgaver skal besvares og teller som angitt ved sensurering.

Dere må vise utregninger eller begrunne svarene.

Sensurfrist:

Karakterene er tilgjengelige for studenter på Studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. www.hiof.no/studentweb

Oppgave 1) 10 %

Oppgave 1) 10 %

a) Kan uttrykket 4a + 3b forkortes?
Begrunn svaret.

4a + 3b er egentlig forkortet av (a + a + a + a) + (b + b + b). Vi vet ingen sammenheng mellom a og b og kan dermed ikke forkorte det noe mer.

b) Kan uttrykket 4ab + 3ba forkortes?
Begrunn svaret.
Uttrykket kan forkortes slik:
4ab + 3ba = 4ab + 3ab = 7ab
Vi har da brukt kommutativ lov (a · b) = (b · a)

c) Løs likningene.

1) $x(x-3)(x+1)=0$
x = 0, x = 3 og x = -1

2) $3x+2=2x^2$

$$2x^2-3x-2=0$$
$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\ \cdot 2}$$
$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}$$
$$x=\frac{3\pm 5}{4}$$
$$x=2\ og\ x=-0{,}5$$

3) $-x^2-\ 1=\ 8-\ 2x^2$

$$x^2=9$$
$$x=3\ og\ x\ \ -3$$

Oppgave 2) 15 %

a) En funksjon f, går igjennom punktet (0, -3) og har stigningstall 2.
Hva er funksjonsuttrykket f(x)?

Siden stigningstall og skjæringspunktet med y -aksen er gitt:
f(x) = ax + b
f(x) = 2x – 3

Funksjonen g(x) = x^2 – 2x – 3 er gitt.

b) Finn skjæringspunktene mellom grafen og koordinataksene.
Nullpunktene:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2}$$
$$x = \frac{2 \pm 4}{2}$$
$$x = 3 \; og \; x = -1$$

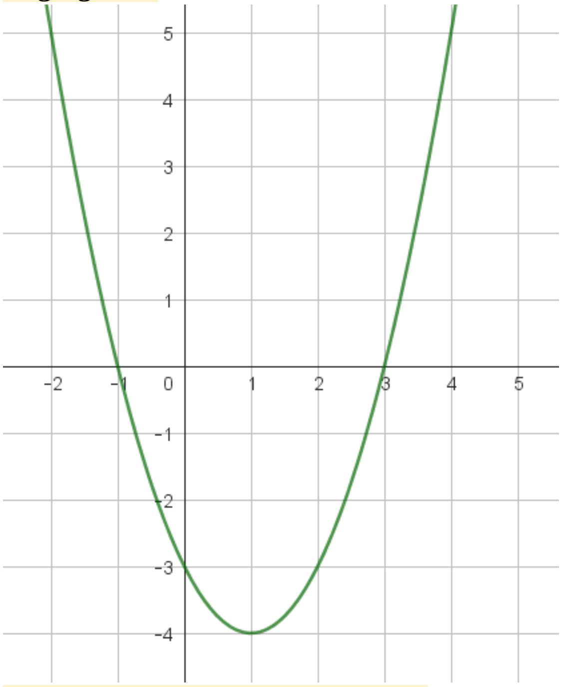
Nullpunktene er (3, 0) og (-1, 0)

Skjæringspunkt med y-aksen er (0, -3)

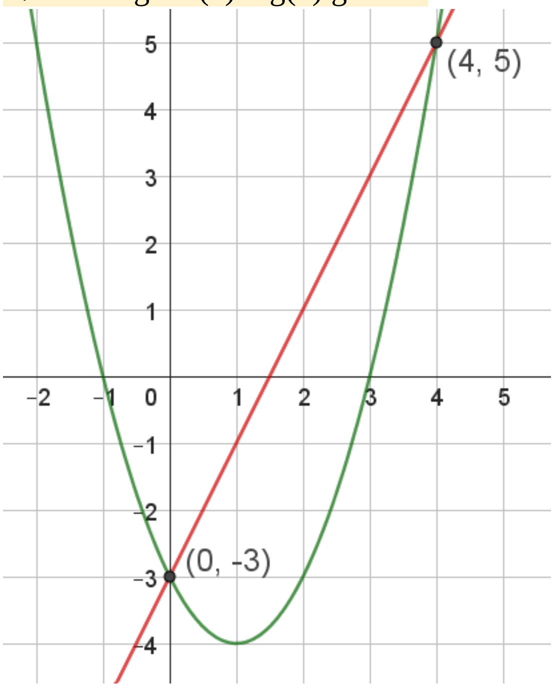
c) Regn ut ekstremalpunktet
Symmetriakse: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$
g(1) = $1^2 - 2 - 3 = -4$

Bunnpunktet er $(1, -4)$

d) Tegn grafen



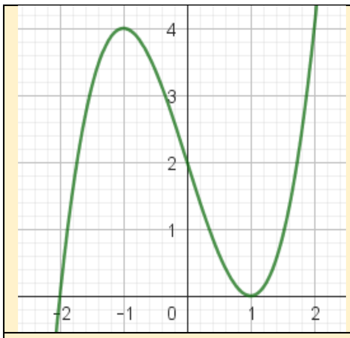
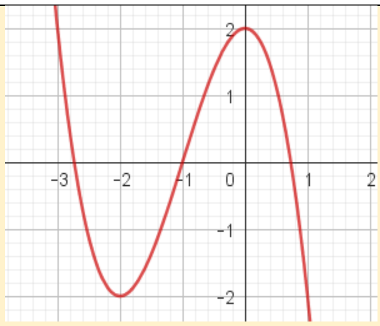
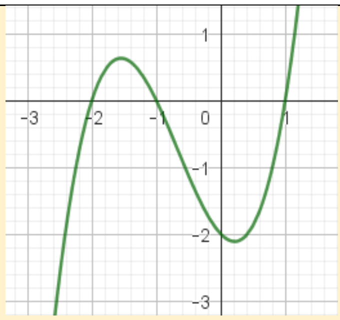
e) Løs likningen f(x) = g(x) grafisk.

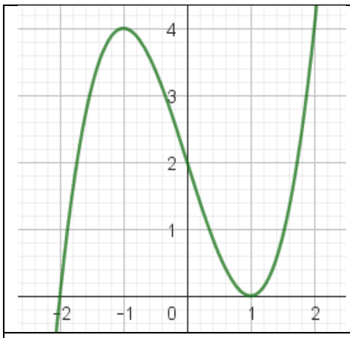
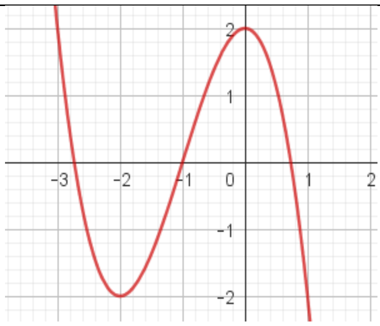
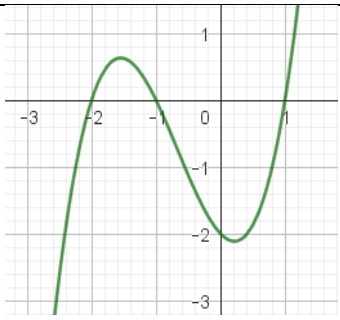


$f(x) = g(x) \rightarrow x = 0$ og $x = 4$

Oppgave 3) 25 %

a) Hvilken funksjon hører til hvilken graf? Forklar hvordan du tenker.

		
$a(x) = -x^3 - 3x^2 + 2$	$b(x) = x^3 - 3x + 2$	$c(x) = (x+1)(x+2)(x-1)$

		
$b(x) = x^3 - 3x + 2$ Skjæringspunktet med y-aksen er (0, 2). a(1) = 0	$a(x) = -x^3 - 3x^2 + 2$ Skjæringspunktet med y-aksen er (0, 2). a(1) = -2	$c(x) = (x+1)(x+2)(x-1)$ Nullpunktene er (-2, 0), (-1, 0) og (1, 0) c(1) = 0

b) Deriver funksjonene

$f(x) = 2x^2 + 1 \rightarrow f'(x) = 4x$

$g(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2x \rightarrow g'(x) = 2x^2 - 2x + 2$

c) Hva kan du bruke den deriverte til?

- Vurdere når funksjonen stiger og synker
- Finne ekstremalpunkter
- Stigningstallet til tangenten i ett punkt

Gitt funksjonen h(x) = $x^3 - 3x + 2$

d) Regn ut h(-2).

$h(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) + 2 = -8 + 6 + 2 = 0$

e) Regn ut nullpunktene.

Siden h(-2) = 0 er g(x) delelig med x + 2

$$x^3 - 3x + 2 : (x + 2) = x^2 - 2x + 1$$
$$\underline{-(x^3 + 2x^2)}$$
$$-2x^2 - 3x + 2$$
$$\underline{-(-2x^2 - 4x)}$$
$$x + 2$$
$$\underline{-(x + 2)}$$
$$0$$

$\mathrm{h(x)} = 0 \rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \rightarrow (x + 2)(x^2 - 2x + 1) = 0$

$(x + 2)(x - 1)(x - 1) = 0$

$Nullpunktene\ er\ (-2{,}0)\ og\ (1{,}0)$

f) Regn ut ekstremalpunktene.

$h'(x) = 3x^2 - 3$

$h'(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0$

$x^2 = 1$

$x = 1\ og\ x = -1$

Ekstremalverdiene er

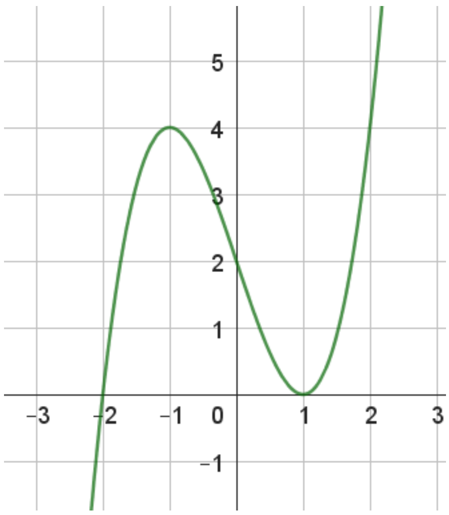
$h(-1) = -1^3 - 3(-1) + 2 = 4$

$h(1) = 1 - 3 + 2 = 0$

Toppunkt er (-1,4)

Bunnpunkt er (1,0)

g) Lag skisse av grafen.

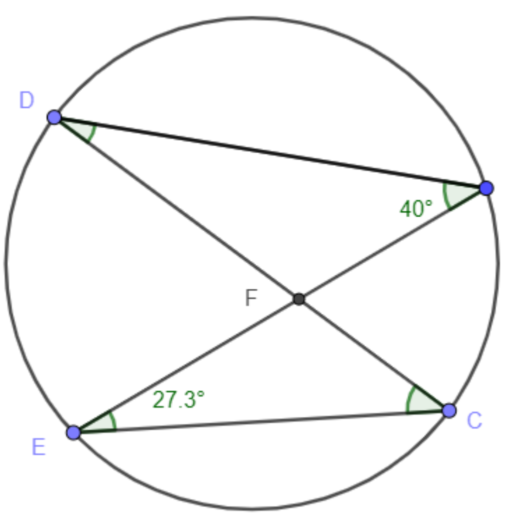
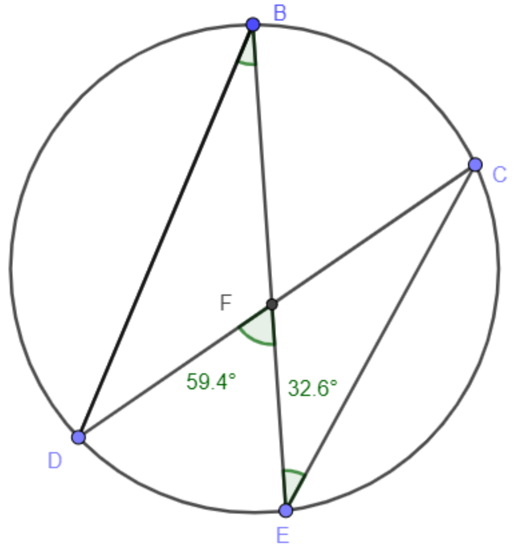


Oppgave 4) 20 %

a) Hva er et geometrisk sted? Nevn de fem geometriske steder som vi har vært gjennom i dette kurset.
Et geometrisk sted er en samling punkter som oppfyller ett eller flere bestemte krav. Alternativt kan man si at alle punkter som ligger på et bestemt sted i forhold til ett eller flere punkter eller linjer, kalles et geometrisk sted.

Midtnormalen, Parallell linje, Halveringslinje, Sirkel og Thales’ setning.

b) Bruk setningen om periferivinkler og sentralvinkler til å finne de ukjente vinklene i figurene under.

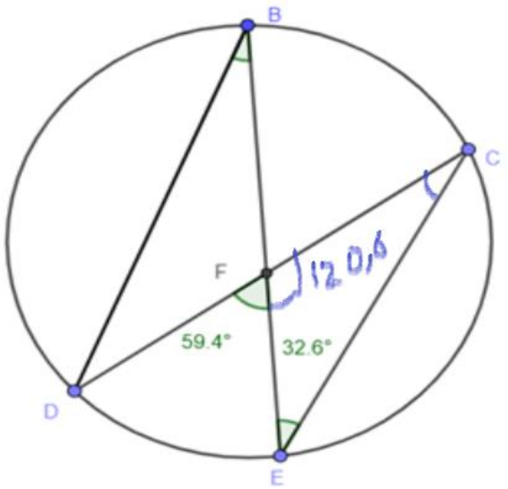
Bestem vinkel D og vinkel C	Bestem vinkel B
	

Vinkel B og Vinkel C er periferivinkler og spenner over samme bue (DE) derfor:

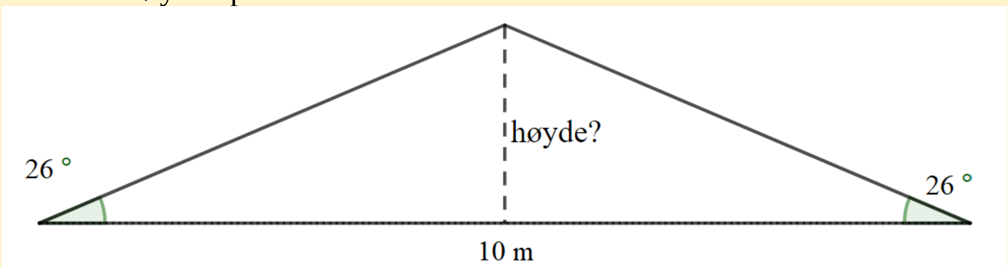
$\angle B = \angle C = 40^{\circ}$, tilsvarende er Vinkel D og Vinkel E er like
$\angle D = \angle E = 27.3^{\circ}$

I trekanten ΔECF er det $\angle F = 180^\circ - 59.4^\circ = 120.6^\circ$, siden vinkelsummen av en trekant er 180°, dermed blir $\angle C = 180° - 120.6° - 32{,}6° = 26{,}8°$

Vi har da $\angle B = \angle C = 26.8°$ fordi begge spenner over bue (DE).



c) Et hus skal ha en takvinkel på 26°. Bredden på huset er 10 meter.
Hva er høyden på loftet?



$\tan 26° = \frac{h}{5\ m} \leftrightarrow h = 5\ m \cdot \tan 26° \approx 2{,}4\ m$

d) En rettvinklet trekant har lengde på katetene lik 3 m og 4 m.

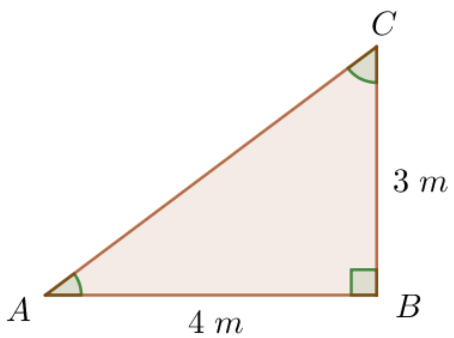
1) Hva er lengden av hypotenusen?

$AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\ m$

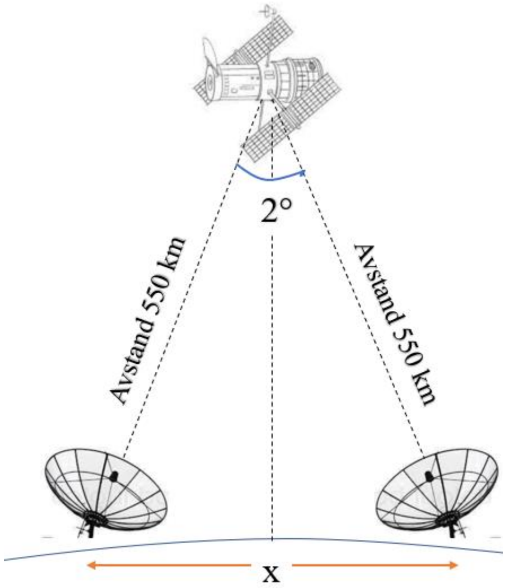
2) Hvor store er vinklene?

$$\tan(A) = \frac{3}{4}$$
$$\angle A = 36{,}9°$$

$$\angle C = 180° - 36{,}9° - 90° = 53{,}1°$$



e) Hva er avstanden mellom parabolene i figuren til under?



Den halve avstanden kalles y:

$\sin(1°) = \frac{y}{550\ km}$

$y = 550\ km\ \cdot \sin(1°)$

$y = 9{,}6\ km$

Avstanden mellom parabolene er 19,2 km

Oppgave 5) 20 %

Didaktisk oppgave.

a) Spill med terninger i klassen.

Elevene starter hver time med følgende spill.
Elevene jobber sammen to og to.
En på hvert par fører regnestykkene.

De kaster 5 terninger, og bruker alle fem «tallene» for å lage et regnestykke med svar 1.
Kast på nytt og lag et regnestykke med svar 2, osv.
Det paret som klarer først klarer først svar 15, vinner.

NB! Regnestykkene kan inneholde de fire regneartene, potenser, brøk, kvadratrøtter osv.
Men tallene 5 og 3 kan ikke bli 53 eller 35. Tallene er kun ensifret.

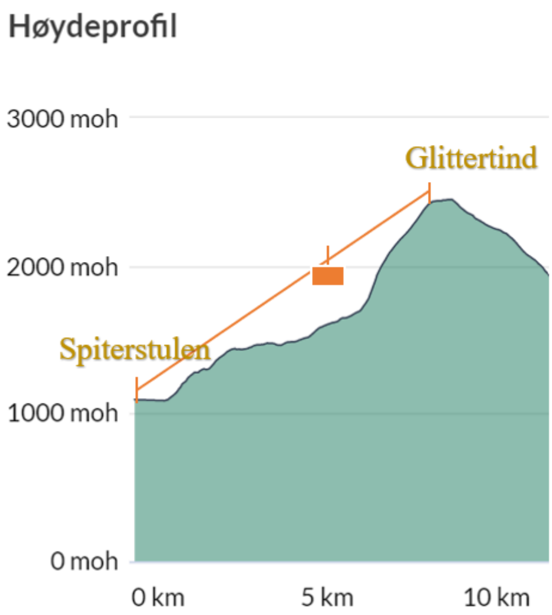
Lærer går rundt og sjekker at føringa er rett.

Hva kan hensikten lærer har med å gjennomføre dette spillet jevnlig?

Elevene øver opp bedre og raskere hoderegning, korrekt føring og dermed algebraisk tenkning.
Konkurransen er motiverende.

1) Hvor lang blir taubanen?
2) Hva blir gradienten?

Hva øves elevene i ved å løse en slik oppgave?



Vannrett lengde er ca 8,5 km
Loddrett lengde er ca 1,3 km

Lengden av taubanen:

$$x^2 = 8{,}5^2 + 1{,}3^2$$

$$x = \sqrt{78} = 8{,}6\ km$$

Gradienten er $\tan(v) = \frac{1{,}3}{8{,}5} \leftrightarrow$ v = 8,7°

Gradient kan utrykkes på flere måter. Lengdene er omtrentlige. Tegningen har ulike enheter på aksene. Totalt er det flere ting elevene må ta hensyn til.

Oppgave 6) 15 %

a) Gitt vektoren $\overrightarrow{AB} = [2\ ,-2]$ og punktet $B(-2,-4)$. Bestem koordinatene til punkt $A(x,y)$.

$$\begin{cases} [-2-x\,,-4-y]=[2\,,-2] \\ -2-x=2 \rightarrow x=-4 \\ -4-y=-2 \rightarrow y=-2 \\ A(-4\,,-2) \end{cases}$$

b) Gitt to vektorer $\vec{u} = [6\,,-2]\ og\ \ \vec{v} = [\,3\,,4]$. Undersøk om vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle.

$$\begin{cases} t\vec{u}=[6t\,,-2t] \qquad ,\vec{v}=[3\,,4] \\ 6t=3 \Rightarrow t=\dfrac{1}{2} \\ -2t=4 \Rightarrow t=-2 \\ \dfrac{1}{2} \neq -2 \ \ \text{vektoren er ikke parallelle} \end{cases}$$

Eller studentene kan se om forholden mellom x-komponentene og y-komponentene er like:

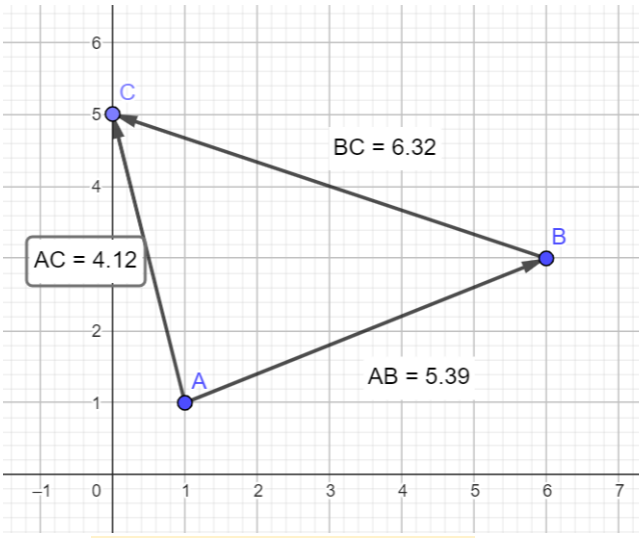
$$\begin{cases} \dfrac{v_x}{u_x}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{v_y}{u_y}=\dfrac{4}{-2}=-2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u \nparallel v$$

Høgskolen i Østfold

c) En trekant har hjørner i punktene $A(1,1), B(6,3)$ og $C(0,5)$. Tegn trekanten og regn ut lengden av sidene i trekanten.

$$\overrightarrow{AB} = [6-1, 3-1] = [5, 2], \overrightarrow{AC} = [0-1, 5-1] = [-1, 4]$$
$$\overrightarrow{BC} = [0-6, 5-3] = [-6, 2]$$

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29} \approx 5,39 \\ \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2+4^2} = \sqrt{17} \approx 4.12 \\ \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-6)^2+2^2} = \sqrt{40} \approx 6.32 \end{cases}$$



d) Finn alle vinklene i trekanten.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos(A) \quad \Rightarrow \cos(A) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

$$\cos(A) = \frac{[5, 2] \cdot [-1, 4]}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{17}}$$

$$\cos(A) = \frac{-5+8}{\sqrt{29 \cdot 17}} = \frac{3}{\sqrt{493}} \Rightarrow \angle A = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{493}}\right) \approx 82,23^\circ$$

$$\overrightarrow{AB} = [5\,,2]\,,\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = [-5\,,-2]$$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\cos(B) \quad \Rightarrow \cos(B) = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}$$

$$\cos(B) = \frac{[-5\,,-2]\cdot[-6\,,2]}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{40}}$$

$$\cos(B) = \frac{30+(-4)}{\sqrt{29\cdot 40}} = \frac{26}{\sqrt{1160}} \Rightarrow \angle B = \cos^{-1}\left(\frac{26}{\sqrt{1160}}\right) \approx 40{,}24^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - 40{,}24^\circ - 82.23^\circ = 57{,}53^\circ$$

$$\angle A = 82.23^\circ \quad ,\angle B = 40{,}24 \quad ,\angle C = 57{,}53^\circ$$