Høgskolen i Østfold

SENSORVEILEDNING

Emnekode:	LUMAT10415 LMUMAT10417
Emnenavn:	Geometri, måling, statistikk og sannsynlighetsregning 2 (5-10)
Eksamensform:	Individuelt, skriftlig hjemmeeksamen
Dato:	25. mai 2021 9:00-15:30
Faglærer(e):	Natalia Bredrup Russel Hatami
Eventuelt: Sensorveiledningen består av 19 sider	

Innhold

Denne sensorveiledningen inneholder:

1. **Vurderingskriterier for den enkelte karakter**
2. **Viktige elementer for vurderingen**
3. **Oppgavene med stikkordsmessig løsningsforslag**

1. Vurderingskriterier for den enkelte karakter

	Generelle kriterier Kilde: https://www.uio.no/studier/eksamen/karakterskala/fagspesifikk-karakterbeskrivelse/mn-math.html#skriftlig	**Prosent av besvarelsen som kan indikere karakter**
A	**Fremragende** prestasjon der kandidaten har løst problemer som krever fantasi og innsikt. Besvarelsen viser at kandidaten fullt ut behersker både de begrepsmessige, regnetekniske og anvendelsesmessige delene av emnet. Fremstillingen er klar og presis med korrekt bruk av notasjon og fagterminologi. Noen få mindre feil eller blanke punkter kan tillates.	[92% - 100 %]
B	**Meget god** prestasjon der kandidaten har løst problemer som går utover det rutinemessige, og som krever god oversikt over emnet. Besvarelsen viser meget god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset. Fremstillingen er klar og med stort sett riktig bruk av terminologi og notasjon.	[77% - 92 %)
C	**God** Gjennomsnittlig prestasjon der kandidaten har løst oppgaver av middels vanskelighetsgrad fra de fleste deler av kurset. Besvarelsen viser god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har ikke i særlig grad klart å anvende sine ferdigheter og kunnskaper på oppgaver som går ut over det rutinemessige. Fremstillingen er grei å forstå, men kan ha en del formelle mangler.	[58% - 77%)
D	**Nokså god** Prestasjon under gjennomsnittet der kandidaten har løst eller kommet et stykke på vei med oppgaver fra flere sentrale deler av kurset. Besvarelsen viser kjennskap til de viktigste teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har vanskelig for å komme helt i mål selv på rutinepregede oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men kan ha en god del formelle mangler.	[46 % - 58%)
E	**Tilstrekkelig** Prestasjon som tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Besvarelsen viser at kandidaten har kjennskap til begreper, teknikker og anvendelser fra flere deler av kurset, og at han/hun til en viss grad kan bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men røper klare feil og misforståelser.	[40 % - 46%)
F	**Ikke bestått** Prestasjon som ikke tilfredsstiller minimumskravene. Besvarelsen viser at kandidaten har manglende kjennskap til sentrale teknikker, begreper og anvendelser, eller manglende evne til å bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Besvarelser som bare viser beherskelse av en avgrenset del av emnet, vil normalt havne i denne kategorien.	[0 % - 40%)

Universitets – og høgskolerådet har utformet disse generelle, kvalitative beskrivelsen av de ulike karakterene:

symbol	betegnelse	generell, ikke fagspesifikk beskrivelse av vurderingskriterier
A	fremragende	Fremragende prestasjon som klart utmerker seg. Kandidaten viser svært god vurderingsevne og stor grad av selvstendighet.
B	meget god	Meget god prestasjon. Kandidaten viser meget god vurderingsevne og selvstendighet.
C	god	Jevnt god prestasjon som er tilfredsstillende på de fleste områder. Kandidaten viser god vurderingsevne og selvstendighet på de viktigste områdene.
D	nokså god	En akseptabel prestasjon med noen vesentlige mangler. Kandidaten viser en viss grad av vurderingsevne og selvstendighet.
E	tilstrekkelig	Prestasjonen tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Kandidaten viser liten vurderingsevne og selvstendighet.
F	ikke bestått	Prestasjon som ikke tilfredsstiller de faglige minimumskravene. Kandidaten viser både manglende vurderingsevne og selvstendighet.

2. Viktige elementer for vurderingen

Nedenfor finnes forslag på løsninger. Det vil selvsagt være flere andre fremgangsmåter som kan gi full uttelling så her må det vurderes i hvert enkelt tilfelle. I gjennomgangen nedenfor er det indikert en maksimumspoengsum for hver av deloppgavene, og i noen grad utdypet hvordan poeng skal settes utover dette. Det er imidlertid av stor betydning med en helhetlig vurdering.

3. Oppgavene med stikkordsmessig løsningsforslag

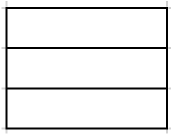
Oppgave 1 3 + 3 + 3 = 9 %

Et flagg består av tre rektangulære felt («striper» på flagget). Flagget skal fargelegges, og det finnes sju farger som kan brukes til fargelegging. Tre elever ble spurt om på hvor mange måter dette kan gjøres på. Hvordan har hver av elevene tenkt? Forklar.

a) Anna svarte: $7 \cdot 7 \cdot 7$
b) Beate svarte: $7 \cdot 6 \cdot 5$
c) Cecilie svarte: $7 \cdot 6 \cdot 6$

Løsningsforslag og vurderingskriterier:

Hver oppgave gir 3% for tilstrekkelig forklaring, 1%-2% hvis forklaring er mangelfull (skjønnsvurdering), f.eks. hvis man bruker farger, men sliter med forklaring.



a) Anna tenker at hver stripe kan ha en av 7 mulige farger, til og med at alle striper er i samme farge. Hennes tankegang kan vises slik:

$$7\ mulige \cdot 7\ mulige \cdot 7\ mulige$$

b) Beate mener at en farge ikke kan brukes flere ganger, hun tenker at første stripe kan ha en av 7 mulige farger, meste stripe kan ha 6 mulige farger fordi en farger er allerede «opptatt» i den første stripa, 3. farge kan ikke fargens som ble bruke på 1. og 2. stripa, da blir det 5 farger å velge mellom:

$$7\ mulige \cdot 6\ som\ er\ igjen \cdot 5\ som\ er\ igjen$$

c) Cecilie mener at det er lov å bruke samme farger to ganger, men at den ikke skal være på nabostriper. F.eks. man kan bruke Blå, Lilla, Rød, Oransje, Gul, Grønn og Hvit, så den første stripa kan ha en av 7 mulige farger, f.eks. Blå. Neste stripa kan ikke ha Blå, derfor er det 6 farger igjen å velge mellom, f.eks. Grønn. Den 3. stripa kan ikke ha Grønn, men den kan ha Blå igjen, og det blir 5 ubrukte farger i tillegg, altså 6 farger.

$$7\ mulige \cdot 6\ som\ er\ igjen \cdot (5\ som\ er\ igjen + den\ som\ ble\ brukt\ først)$$

Oppgave 2 2 + 2 + 2 + 2 = 8 %

I en boks ligger det kuler som er nummerert fra og med 1 til og med 100. Du kan ikke se kulene, og trekker en kule tilfeldig.

a) Hva er sjansen for at kula du trekker, har et tall som er delelig med 25?
b) Hva er sjansen for at kula du trekker, har et tall som er delelig med 10?
c) Hva er sjansen for at kula du trekker, har et tall som er delelig med både 25 og 10?
d) Jens svarer på del c) at sjansen er lik 0,004. Hvordan kan Jens ha tenkt?

Løsningsforslag og vurderingskriterier:

Hver deloppgave teller 2% ved riktig svar og tilstrekkelig forklaring, 1% ved manglende forklaring med riktig svar – gjelder a, b, c. I del d) får man 2% for tilstrekkelig forklaring, 1% for mangelfull argumentasjon eller «feil» antakelse der argumentasjon har noe logikk (skjønnsvurdering)

a) gunstige utfall: 25, 50, 75, 100, $p(25) = \frac{4}{100} = 0{,}04$
b) gunstige utfall: 10, 20, … 90, 100, $p(10) = \frac{10}{100} = 0{,}1$
c) gunstige utfall: 50 og 100, $p(25 \cap 10) = \frac{2}{100} = 0{,}02$
d) det virker at Jens multipliserer $0{,}04 \cdot 0{,}1 = 0{,}004$ uten a reflektere at sannsynligheten er urimelig liten i denne konteksten. Hvis man hadde regnet sannsynlighet for å trekke et konkret tall fra 1 til 100 i stedet for en gruppe tall med felles kjennetegn (som f.eks. å være i 10-gangen), så den minste sannsynlighet i denne konteksten hadde vært 0,01. Ellers kan påpeke at hendelsene ikke er uavhengige.

Oppgave 3 3 + 2 + 2 + 2 = 9 %

Du vil gi et terningspill til dine elever, og prøver å lage noe nytt. Her er et forslag: «En deltaker kaster to terninger (f.eks. en rød og en blå) og noterer differansen mellom antall prikker på hver av terningene. Man får stjerne-poeng om man får maksimal differanse».

a) Lag en oppstilling som viser utfallsrommet for dette spillet.

b) Hva er sannsynligheten for at man får stjerne-poeng ved et tilfeldig kast?

c) Hva er sannsynligheten for at man får differanse lik 2 ved et tilfeldig kast?

d) Hva er sannsynligheten for at man får differanse lik 2 ved et tilfeldig kast to ganger på rad?

* Angi svar som en brøk i del b, c og d) og forenkle den så lenge det er mulig

Løsningsforslag og vurderingskriterier:

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

a) Se bilde med korrekt oppstilling som kan få 3%, om man bestemmer seg å trekke f.eks. antall blå prikker fra antall røde, og fyller henholdsvis halve tabellen med negative tall, så er det 2%. Hvis man bare skisserer tabell, men uten innhold, eller feil innhold, kan gi vel 1%

b) 2% for riktig svar og vise gunstige utfall, 1% bare for svar uten å vise tabellen i del a).

Gunstige utfall er alle som har differanse = 5, dermed $p(stjerne) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

c) samme kriterier som i del b)

Gunstige utfall markert i tabellen, dermed $p(dif = 2) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

d) 2% hvis man viser korrekt svar og resonnerer mer ord / bilderesonnement. Man kan vise f.eks. valgtre der man har $p(diff = 2) = \frac{2}{9}$ og $p(diff \neq 2) = \frac{7}{9}$ grener for første og andre trekk, og konkludere at $p(diff = 2, to\ ganger) = \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{81}$. Evt. kan argumentere at dette er binomisk modell og forklare hvorfor det (de 3 kriteriene), eller ved å multiplisere $\frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9}$ og forklare sin tankegang.

1% hvis man argumenterer korrekt, men regner feil, eller hvis det er bare svar uten merforklaring.

Oppgave 4 4 + 4 = 8 %

I en gruppe er det 20 menn og 10 kvinner. Hvis du velger tilfeldig 3 personer, hva sannsynligheten for at du velger to menn og en kvinne?

a) Løs oppgaven ved å bruke en metode som kan passe på ungdomstrinnet.

b) Løs oppgaven ved å bruke en metode som passer for vgs nivå. Hva heter sannsynlighetsfordelingen du bruker her?

* Angi svar som en brøk og forenkle den så lenge det er mulig

Løsningsforslag og vurderingskriterier:

a) Et valgtre kan passe inn på ungdomstrinnet:

1. Person	En Mann, $p = \frac{20}{30}$				Ei Kvinne, $p = \frac{10}{30}$			
2. Person	M, $p = \frac{19}{29}$		K, $p = \frac{10}{29}$		M, $p = \frac{20}{29}$		K, $p = \frac{9}{29}$	
3. Person	M, $\frac{18}{28}$	K, $\frac{10}{28}$	M, $\frac{19}{28}$	K, $\frac{9}{28}$	M, $\frac{19}{28}$	K, $\frac{9}{28}$	M, $\frac{20}{28}$	K, $\frac{8}{28}$

$$P(2m+1k) = \frac{20}{30}\cdot\frac{19}{29}\cdot\frac{10}{28} + \frac{20}{30}\cdot\frac{10}{29}\cdot\frac{19}{28} + \frac{10}{30}\cdot\frac{20}{29}\cdot\frac{19}{28} = \cancel{3}\cdot\frac{\cancel{10}\cdot 19\cdot 20}{28\cdot 29\cdot \cancel{30}} = \frac{19\cdot\cancel{20}}{\cancel{28}\cdot 29}$$
$$= \frac{19\cdot 5}{7\cdot 29} = \frac{95}{203}$$

4% for korrekt metode valg, samt forklaring og utregning, 2-3% hvis man regner feil (skjønnsvurdering, hvor grove eller slurve feil er det), 1% for metode forslag uten å løse den

b) Dette er hypergeometrisk fordeling som passer på vgs nivå. Bruker formelen:

$$\binom{20}{2} = \frac{20!}{2!\cdot 18!} = \frac{19\cdot 20}{1\cdot 2}, \qquad \binom{10}{1} = 10, \qquad \binom{30}{3} = \frac{28\cdot 29\cdot 30}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$p(2m+1k) = \frac{\binom{20}{2}\cdot\binom{10}{1}}{\binom{30}{3}} = \frac{19\cdot 20}{\cancel{1\cdot 2}}\cdot 10\cdot\frac{\cancel{1\cdot 2}\cdot 3}{28\cdot 29\cdot 30} = \frac{3\cdot 10\cdot 19\cdot 20}{28\cdot 29\cdot 30} = \frac{95}{203}$$

4% for korrekt modell type, samt forklaring og utregning, 2-3% hvis man regner feil (skjønnsvurdering, hvor grove eller slurve feil er det), 1% hvis man svarer at dette er hypergeometrisk fordeling uten å kunne anvende formelen

Oppgave 5 4 + 4 + 2 = 10 %

Du kaster en terning 3 ganger. Hva er sannsynligheten for at det blir akkurat en firer?

a) Løs oppgaven ved å bruke en metode som kan passe på ungdomstrinnet.

b) Løs oppgaven ved å bruke en metode som passer for vgs nivå. Hva heter sannsynlighetsfordelingen du bruker her?

* Angi svar som en brøk og forenkle den så lenge det er mulig

c) En elev svarer $\frac{3}{8}$. Hvordan tror du eleven har tenkt?

Løsningsforslag og vurderingskriterier:

a) Et valgtre, evt. skriftlig resonnement kan passe her. Situasjoner når man får en firer akkurat en gang av 3 kast, kan vises slik: 4xx, x4x, xx4, der x står for andre antall prikker som er **ikke** 4.

$$p(\text{"4xx"}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}, \qquad p(\text{"x4x"}) = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}, \qquad p(\text{"xx4"}) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$$

$$p(\text{en "4" på 3 kast}) = \cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{6}}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{25}{72}$$

4% for korrekt metode valg, samt forklaring og utregning, 2-3% hvis man regner feil (skjønnsvurdering, hvor grove eller slurve feil er det), 1% for metode forslag uten å løse den

b) Dette er binomisk fordeling som brukes på vgs nivå. Bruker formelen:

$$p(en\ \text{"4"}\ på\ 3\ kast) = \binom{3}{1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{25}{36} = \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{36} = \frac{25}{72}$$

4% for korrekt modell type, samt forklaring (de 3 kriterier er oppfylt) og utregning, 2-3% hvis man regner feil (skjønnsvurdering, hvor grove eller slurve feil er det), 1% hvis man svarer at dette er binomisk fordeling uten å kunne anvende formelen

c) Eleven tenkte muligens at det er 50% eller ½ sannsynlighet å få en firer på et kast – enten ja, eller ikke. Og siden det er 3 kast, så regner eleven sannsynlighet for at firer blir på første kast, men ikke på 2. og 3. slik: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, og på samme måte regner sannsynlighet for at firer blir akkurat på kast nr 2, og kast nr 3. Dermed blir det $3\cdot\frac{1}{8}$. Alternativt at eleven tenkte valgtre med 3 steg og hver gren har sannsynlighet ½ , da er det 3 grener etter 3 steg som er gunstige her.

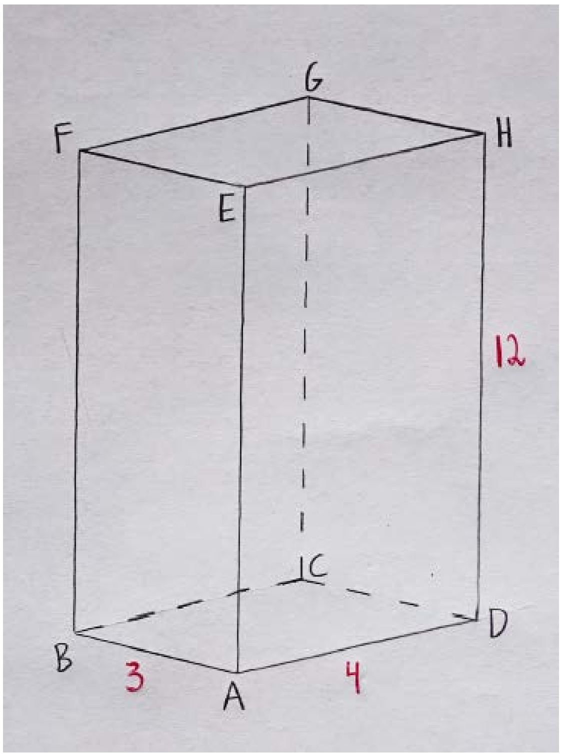
Man får 2% her for tilstrekkelig forklaring, 1% for mangelfull argumentasjon eller «feil» antakelse der argumentasjon har noe logikk (skjønnsvurdering)

Oppgave 6 3 + 2 + 3 + 3 + 3 = 14 %

a) Hvor mange «ord» kan man lage ved å stokke bokstavene i HOHOHOO? Begrunn *hvorfor* ditt svar er riktig.

b) Mats befinner seg nå i hjørnet av et 3 x 4 rektangel. Han skal bevege seg i det motstående hjørne, og tillatte skritt er enten 1 steg til Høyre eller 1 steg Oppover. Forklar sammenheng mellom antall mulige veier Mats kan gå med ditt svar i del a).

Resten av oppgaven handler om et rektangulært prisme med dimensjoner 3 x 4 x 12 (se bilde).



c) Nina befinner seg nå i hjørnet A og skal bevege seg til det motsatte hjørnet G, og tillatte skritt er enten 1 steg til Høyre eller 1 steg Frem eller 1 steg Oppover. Finn antall mulige veier Nina kan gå, ved regning.

d) Beregn den korteste vei fra A til G, forklar din løsning.

e) Siden trekanten *ACG* er rettvinklet, så den ene vinkelen er 90^0. Finn hvor store de andre vinklene i trekanten *ACG* er (i grader), forklar din løsning.

*bruker man GeoGebra så er det kun kalkulator-funksjon som er tillatt her

Løsningsforslag og vurderingskriterier:

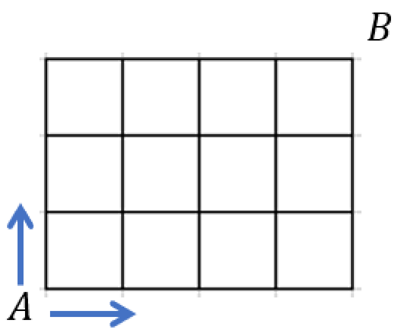
a) Hvis vi f.eks. nummerer alle bokstaver med eget nummer, så kan de stokkes på 7! måter. Allikevel er det 3 identiske bokstaver H som kan stokkes seg mellom på 3! måter, og 4 identiske O som kan stokkes på 4! måter. Hvis vi tar hensyn til identiske bokstaver, så blir det flere ulike nummer-kombinasjoner som er identiske med tanke på selve bokstaven. Dvs. dette antallet 7! som er nummer-kombinasjon skal inneholde 3! gjentatte kombinasjoner med tanke på samme bokstaven H, og på samme måte gjelder 4! gjentagende for bokstaven O. Derfor må vi dele både på 3! og 4! for at det blir igjen forskjellige bokstav kombinasjoner (ingen gjentagende).

$$\frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

En slik resonnement eller lignende kan få 3%. Alternativt man kan prøve å liste opp systematisk alle mulige kombinasjoner, dette skal gi 2%.

3% hvis man resonnerer riktig, og løser riktig, 2% hvis man lister opp alle, og får riktig svar, 2% hvis man resonnerer riktig og har slurvefeil i utregning f.eks., 1% hvis man resonnere delvis korrekt, men klarer ikke å løse oppgaven

b) Oppgaven kan ses som geometrisk forklaring på del a) – på hvor mange måter kan man komme fra A til B med tillatte steg: til Høyre og Oppover. Til sammen ser det 4 steg til Høyre og 3 steg Oppover for å komme fra A til B, og de stegene kan kombineres på ulike måter. Til sammen antall måter blir 35.



2% hvis man «knekker» koden med bokstavene H og O og gir tilstrekkelig forklaring på det. 1% hvis man løser oppgaven riktig uten å se sammenheng. Vurdering kan variere ut fra hvor god forklaring er.

c) For å komme fra A til G må man foreta til sammen 4 steg til Høyre, 3 steg Frem og 12 steg Oppover, altså 4+3+12=19 steg til sammen. De 19 steg kunne stokkes på 19! måter hvi svi hadde nummerert dem, men må ta hensyn til gjentagende kombinasjoner grunnet identiske steg som er til Høyre, Frem og Oppover (se forklaring i del a-b). Dermed antall mulige veier fra A til G er:

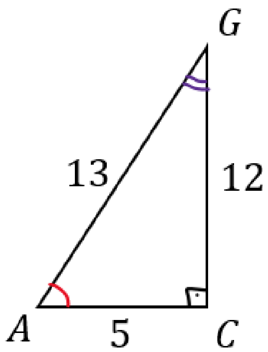
$$\frac{\cancel{19}!}{4! \cdot 3! \cdot \cancel{12}!} = \frac{19 \cdot \cancel{18} \cdot 17 \cdot \cancel{16} \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 19 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 1 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 = 1\,763\,580$$

3% for riktig og tilstrekkelig argumentasjon, samt utregning, 2% for argumentasjon og korrekt oppstilling av regnestykke, men feil i selve utregning, 2% for å vise utregning uten å kommentere ytterligere, 1% hvis man prøver å argumentere uten å få svar

d) Trekanten *ACG* er rettvinklet fordi *CG* står normalt på grunnflata *ABCD*, og det skal dannes en rett vinkel *ACG*. Det et rektangel i grunnflata, dermed diagonalen skal ha lengde $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (Pytagoras). Bruker setningen en gang til i forhold til trekanten *ACG* og finner hypotenusen $AG = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$

3% for korrekt utregning, samt tilstrekkelig forklaring på sin utregning (det er lov å finne lengde *AG* i et regnestykke $\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}$), 2% hvis forklaring mangler, eller hvis forklaringen er på plass, men begått regnefeil, 1% hvis man forsøker å forklare uten å beregne

e) Her kan det være fint en enkel skisse, evt. skissere inn i bildet som følger med oppgaven. Det er ikke en bestemt måte hvilken av trigonometriske funksjoner skal man bruke for å finne hvor store vinklene *A* og *G* er, argumentasjon og korrekt bruk er viktigste. F.eks. $\tan A = \frac{12}{5}$ og $\tan G = \frac{5}{12}$, man kan finne vinklene ved å bruk *arctan* funksjon på kalkulator eller CAS:



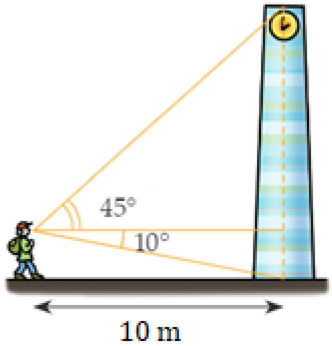
$\angle A = \arctan \frac{5}{12} \approx 67{,}4°$ og $\angle G = \arctan \frac{5}{12} \approx 22{,}6°$

3% for korrekt bruk av arctan/arcsin/arccos funksjoner, samt forklaring, og svaret er gitt i grader (med fornuftig avrunding, runde av til hele grader er OK), 2% hvis svaret er gitt i radianer f.eks. eller det presise svaret fra CAS som ikke viser *hvor mange grader* vinkelen er faktisk, 2% hvis svaret er OK, men manglende forklaring på det man gjør, 1% hvis man prøver å finne hvor store vinklene er, uten å bruke trigonometri – f.eks. ved å konstruere en slik trekant i GeoGebra, og se på vinkel størrelser ved å bruke verktøyknapp i GeoGebra.

Oppgave 7   4 + 2 = 6 %

a) Ludvig lurer på hvordan man kan anvende trigonometri i praktisk sammenheng. Du ønsker å vise følgende oppgave til eleven:

«En turist befinner seg 10 m fra et klokketårn som står på torvet. Han ønsker å beregne høyde på tårnet. Vinkelen når han ser på bunnen til tårnet er 10^0 i forhold til horisonten, og den er 45^0 når han ser på toppen. Hjelp turisten å beregne hvor høyt tårnet er, skriv svaret i meter, og rundt det av til tideler.»



Vis løsning på denne oppgaven som du kunne ha presentert for eleven.

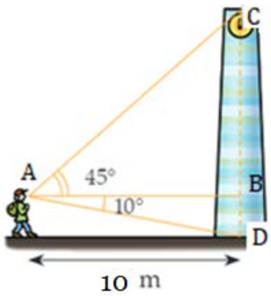
*bruker man GeoGebra så er det kun kalkulator-funksjon som er tillatt her

(bildet er hentet fra www.soma.lv 05/05/2021, og redigert i bilderedigeringsprogram)

b) Bendik spør deg: «Jeg hørte at det finnes såkalte *utvidelse* av Pytagoras setning – hva er det for noe?» Kan du forklare Bendik i korte trekk det han lurte på? Hvilken setning spurte han om, og hvorfor ble den kalt for «utvidelse».

Løsningsforslag og vurderingskriterier:

a) Setter bokstavene på eksisterende bilde eller skisserer egen tegning.
AB = 10 m, $\angle BAC = 45°$ (gitt)
$\angle ABC = 90°$ (riktig tolkning av situasjon at tårnet står «vinkelrett» mot horisonten)



$$\angle ACB = 180° - 90° - 45° = 45°$$

Det følger til at trekanten ABC er likebeint, og derfor AB = BC = 10 m.

Alternativt, kan regne ved å bruke tangens: $\tan 45° = \frac{BC}{AB}$ eller $1 = \frac{BC}{10}$, dvs. BC = 10 m.

Finner BD: $\tan 10° = \frac{BD}{10}$ $\Leftrightarrow$ $BD = 10 \cdot \tan 10° \approx 10 \cdot 0{,}18 = 1{,}8\,m$

Total høyde: CD ≈ 10 + 1,8 = 11,8 m.

4 % hvis bruker trigonometrisk funksjon (tangens her), regner riktig og forklarer tilstrekkelig, 3% hvis man viser unødvendig vanskeligere løsning, f.eks. å involvere hypotenus og andre funksjoner, eller for manglende forklaring ellers, trekk -1% for hvert linjestykke som er regnet feil (BD og *BC*), 0% hvis man legger sammen $45° + 10°$

b) Setningen Bendik spurte om er *cosinus* setningen som hjelper å finne en side-lengde når to andre sidelengder er gitt, samt kjent cos verdi til vinkelen mellom de to kjente sidene: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$ der a og b er kjent, samt $\cos C$, og C ligger mellom a og b. Hvis $\angle C = 90°$, så får at $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0$ eller bare $c^2 = a^2 + b^2$ som er kjent for oss som Pytagoras. Dvs. Pytagoras er et spesielt tilfelle av *cosinus* setningen som kan brukes for alle vinkler mellom 0° og 180°, ikke bare for 90°. Derfor kalles denne setningen for *utvidelse* av Pytagoras.

2% for tilstrekkelig forklaring og svarer faktisk hvorfor cosinus setningen er utvidelse av Pytagoras, 1% hvis man sier bare at dette handler om cosinus setning uten å forklare mer, eller hvis forklaring er mangelfull. Kan gi også 1% hvis man forklarer tilstrekkelig nok at det finnes faktisk en slik setning og hvordan den funker, men sier ikke noe hva den setningen heter.

Oppgave 8 2 + 2 + 2 + 2 + 3 = 11 %

Det er gitt at $\cos u = \frac{3}{4}$ og vinkel u ligger i 1. kvadrant

a) Vis hvordan du kan finne eksakt $\sin u$ verdi *ved regning*

b) Vis hvordan du kan finne eksakt $\tan u$ verdi *ved regning*

c) Vis hvordan du kan anslå $\sin u$ verdi *ved avlesning av sinus akse*

d) Vis hvordan du kan anslå $\tan u$ verdi *ved avlesning av tangens akse*

e) Camilla spør deg hvorfor man bruker akkurat den tangens akse, altså hva gjør den til å passe for avlesning av tangens verdier. Hvordan skal du forklare det til henne? Bruk enhetssirkelen i din forklaring.

*bruker man GeoGebra som konstruksjonsverktøy kan ikke anvende andre verktøyknapp enn de som simulerer passer og linjal og rutepapir med inndelinger

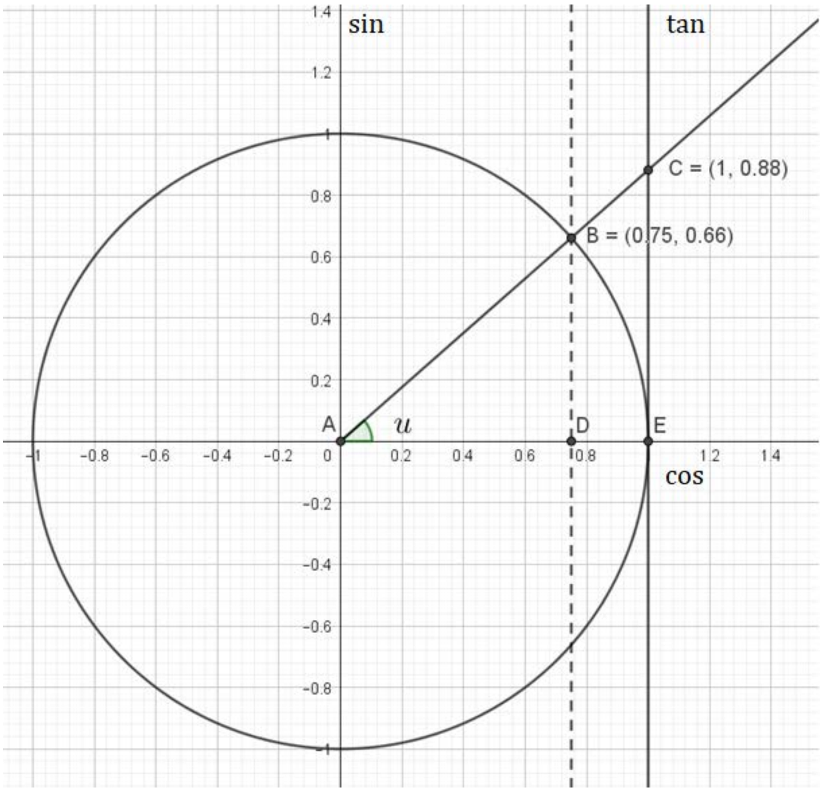
Løsningsforslag og vurderingskriterier:

a) $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ dvs. $\sin^2 u + \frac{9}{16} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin u = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ettersom vinkelen u ligger i 1. kvadranten.

b) $\tan u = \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{\sqrt{7}}{4} : \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

2% per oppgave hvis regner kun den positive sin og tan verdi og viser presis verdi uten avrunding underveis (det er lov å vise avrundet verdi helt på slutten), 1% hvis man regner presis verdi, men viser både positiv og negativ, 1% hvis man bruker kalkulator og runder av midt i regnestykke f.eks. $\sin^2 u + 0{,}56 = 1$ i stedet for å skrive brøk, 0% ved å bruke verktøy, f.eks. for å finne selve vinkel

Generelt for del a) og b) – trekk på 0,5% hvis man ikke viser formlene som skal brukes



c) Omtrent sinus verdi er 0,66 – se i punktet B
d) Omtrent tangens verdi er 0,88 – se i punktet C

2% for riktig avlesning, rimelige marginer er 0,6-0,7 for sin verdi, og 0,8-0,9 for tan verdi (må ta hensyn til selve kvalitet hvis det er tegning for hånd, hvordan skjæringspunktet ser ut faktisk). Hvis man bruker Geogebra og leser av punkt koordinater, **gis full uttelling.** Dvs. man forstår dette og kan bruke GeoGebra fornuftig. 1% vet hvor sinus og tan akser ser ut, men klarer ikke å lese av riktig tall på akse, eller leser av med stort avvik.

e) Det holder med å argumentere ved å bruke tangens definisjon at dette er forholdet mellom motstående og hosliggende katet. På bildet er tangens til den markerte vinkelen ifølge definisjon $\frac{EC}{AE} = \frac{0{,}88}{1} = 0{,}88$. Siden tangens akse går gjennom $x = 1$, så hosliggende katet skal alltid ha lengde lik 1, dermed tangens verdi kan bare leses av aksen.

3% for tilstrekkelig argumentasjon og bruker enhetssirkelen, 1-2% for mangelfull argumentasjon (skjønnsvurdering)

Oppgave 9 3 + 3 + 4 = 10 %

Det er gitt følgende punkter i koordinatplanet:

$$A = (-1, -3), B = (4, -2), C = (5, 3), D = (0, 2)$$

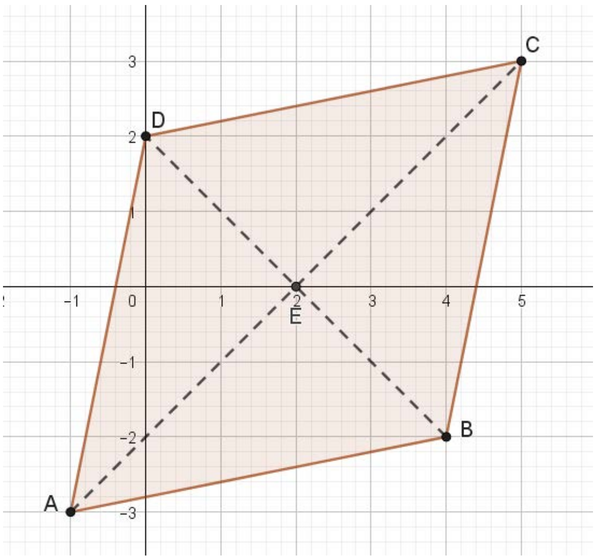
a) Hva slags figur danner punktene *A*, *B*, *C*, *D*? Begrunn svaret ved å referere til figur-definisjon og utregninger som underbygger den.

Konstruer diagonaler i din figur og sett av skjæringspunkt.

b) Vis at skjæringspunktet deler begge diagonalene i like lange deler, begrunn svaret – f.eks. ved hjelp av vektorregning

c) Vis at diagonalene står vinkelrett mot hverandre, begrunn ved regning

Løsningsforslag og vurderingskriterier:



a) ABCD er en rombe, og rombe er en firkant der alle sider er like lange. Alternativt, kan man begrunne at motstående sider er parvis parallelle, og i tillegg alle sider er like lange:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = [5, 1]$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = [1, 5]$$

$$AB = DC = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

$$AD = BC = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

3% for korrekt tegning, og viser til definisjon og begrunne med utregninger, 2% riktig konstruksjon og utregning, med forklarer ikke definisjon, 1% hvis man bruke GeoGebra f.eks. og henter lengdene derfra, dvs. uten å regne selv.

b) Her kan man finne midtpunktet til hver diagonal og bekrefte at dette er et og det samme felles punkt for begge diagonalene, altså skjæringspunkt:

$$E = M_{AC} = \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{-3+3}{2}\right) = (2,0)$$

$$E = M_{BD} = \left(\frac{4+0}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = (2,0)$$

3% hvis man viser både utregning og argumentasjon, 2% bare utregning uten argumentasjon på det man gjør, 1% hvis man «ser» det på tegningen.

c) Man kan vise at lengder f.eks. i trekanten *DEC* oppfyller Pytagoras setning, og dermed trekanten er rettvinklet, dvs. $EC \perp ED$:

$$\overrightarrow{ED} = [-2,2], ED = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$\overrightarrow{EC} = [3,3], EC = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$$DC = \sqrt{26}\ (se\ del\ a)$$

Lengdene oppfyller Pytagoras «krav», dvs. $ED^2 + EC^2 = DC^2$ fordi det blir

$\left(\sqrt{8}\right)^2 + \left(\sqrt{18}\right)^2 = \left(\sqrt{26}\right)^2$ eller $8 + 18 = 26.$

Evt. man kan anvende skalar-produkt for vektorer hvis argumenter for det, dvs. viser til regelen at to vektorer er ortogonale hvis og bare hvis deres skalar-produkt er lik 0.

Evt. man kan vise til at f.eks. *ABD* er likebeint (bevist i del a), og at *AE* er median fordi *E* er midtpunkt på *BD* (se del b), og referere til median egenskap for likebeinte trekanter, at den er også høyde mot grunnlinja *BD*.

4% for tilstrekkelig argumentasjon, samt korrekt utregning underveis, 2-3% for mangelfull argumentasjon (vurderes på skjønn), 2% hvis man argumenterer korrekt, men får regnefeil, 1% hvis man forsøker å henvise til relevant teori uten å anvende den

Oppgave 10 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15 %

Trekanten *ABC* dannes av punktene $A = (3, 2), B = (8, 7), C = (1, 9)$. Punkt $D = (5, 4)$ ligger på sida *AB*, og det er gitt at $DE||BC$.

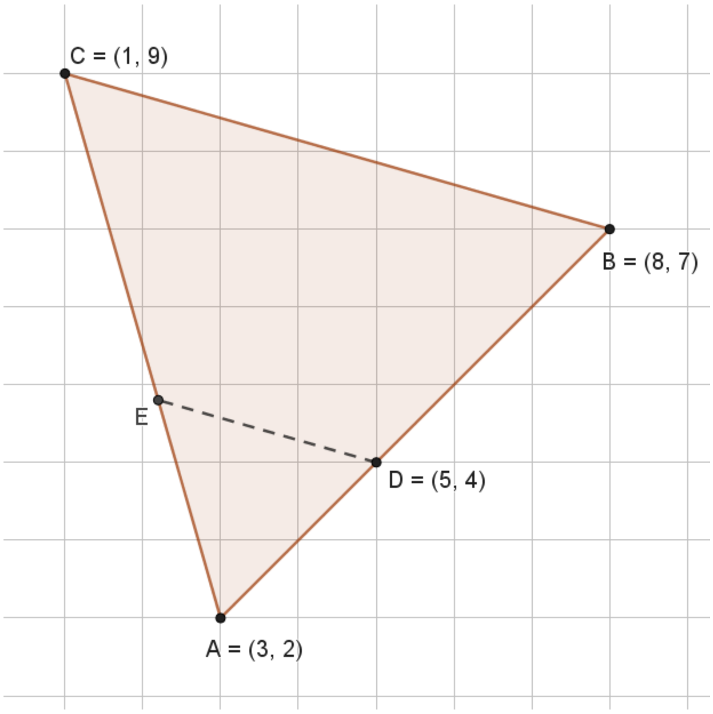
a) Forklar hvorfor trekantene *ABC* og *ADE* er formlike

b) Finn forholdet $AD: AB$ – f.eks. ved å bruke vektorregning

c) Finn koordinater til punkt *E* – f.eks. ved å bruke vektorregning

d) Vis at $A_{ABC} = 22{,}5\ a.e.$ (arealenheter)

e) Finn A_{ADE} ved å benytte at $A_{ABC} = 22{,}5\ a.e.$ Vis utregning.



Løsningsforslag og vurderingskriterier:

a) *ABC* og *ADE* er formlike fordi de har minst to parvis kongruente vinkler (setning VV): $\angle A$ er felles for begge, og $\angle ADE \cong \angle ABC$ som samsvarende vinkler ved parallelle *ED* og *BC* (gitt), på samme måte $\angle AED \cong \angle ACB$

3% for fullstendig argumentasjon, 2% hvis refererer til korrekt formlikhetssetning, men mangler argumentasjon for alle steg, 1% hvis nevner setning VV uten å forklare ytterligere

b) Her kan man finne f.eks. lengder og deretter forholdet, eller sammenlikne vektorer $\overrightarrow{AD}$ og $\overrightarrow{AB}$ siden de er parallelle fordi ligger på samme linja (gjennom *AB*). Finner vektorer: $\overrightarrow{AD} = [5 - 3, 4 - 2] = [2, 2]$ og $\overrightarrow{AB} = [8 - 3, 7 - 2] = [5, 5]$ – begge vektorer kan uttrykkes: $\overrightarrow{AD} = 2[1, 1]$, $\overrightarrow{AB} = 5[1, 1]$, og dermed vektor-lender skal forholde seg $AD: AB = 2: 5$

3% for tilstrekkelig forklaring og riktig utregning, 2% for mangelfull forklaring eller manglede regning som støtter argumentasjon, 1% for bare svar uten å forklare ytterligere

c) Her må referere til formlike trekanter og bruke målestokken som gjelder trekantene ABC og ADE, dvs. $DE:BC = AD:AB = 2:5$. Finner først vektoren $\overrightarrow{BC} = [1-8, 9-7] = [-7, 2]$, og deretter vektoren $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{5}[-7, 2] = \left[-\frac{14}{5}, \frac{4}{5}\right]$ som flytter punkt $A = (3, 2)$ til $E = (3, 2) + \left[-\frac{14}{5}, \frac{4}{5}\right] = \left(3 - \frac{14}{5}, 2 + \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{14}{5}\right)$

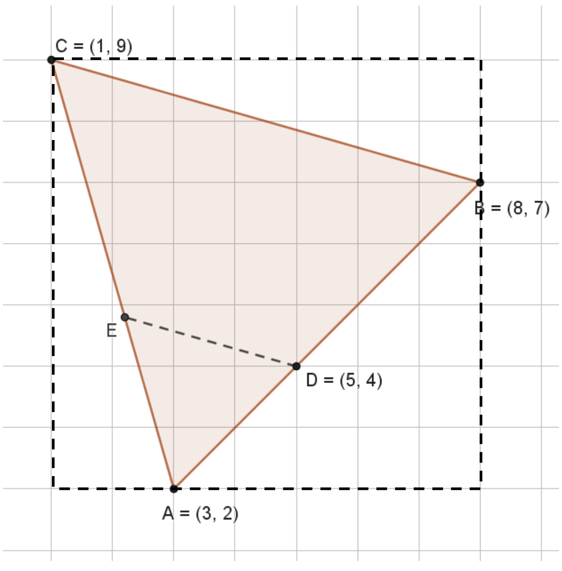
3% hvis man viser fullstendig utregning med alle steg, samt forklaring, 2% for mangelfull forklaring eller feil underveis, 1% hvis man peker f.eks. på målestokk, men klarer ikke å beregne

d) Metodefritt så lenge de kan argumentere for den. F.eks. mulige løsningsmåter kan være:

- bruk av cos setning når 3 lengder er kjent, og deretter finne sin verdi, og anvende arealsetning – tidskrevende og lite effektiv her
- at man ser at $AC = BC$, finne median mot sida AB ved å bruke koordinater
- hvis man omrisser et kvadrat 7x7 ruter, og ser at

$$A_{ABC} = 7^2 - 2 \cdot \frac{7 \cdot 2}{2} - \frac{5 \cdot 5}{2} = 49 - 14 - \frac{25}{2} = 35 - 12{,}5 = 22{,}5\ a.e.$$

3% for fullstendig forklaring samt utregning, 2% for en bra forklaring, men feil i utregning, eller hvis alt er regnet riktig, men mangler argumentasjon, 1% hvis man trekker inn relevant teori uten å anvende den



e) Målestokken 2:5 gjelder lengder i formlike trekanter ABC og ADE, når det gjelder arealet, så forholdet mellom arealene til disse trekantene blir da $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$. Dermed

$$A_{ADE} = \frac{4}{25} \cdot A_{ABC} = \frac{4}{25} \cdot 22{,}5 = \frac{4}{\cancel{25}} \cdot \frac{\cancel{45}}{2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{2} = \frac{2 \cdot 9}{5} = \frac{18}{5} = 3{,}6\ a.e.$$

3% for tilstrekkelig forklaring (viktig at de peker på at målestokken skal opphøyes i 2.), samt korrekt utregning, 2% hvis utregning har feil eller er manglende at man bruker kalkulator f.eks.), 2% hvis det er bar utregning uten merforklaring, 1% hvis man peker f.eks. på arealforholdet uten å regne arealet, eller trekker noe av relevant teori.