Alle utregninger skal forklares/begrunnes. Riktig svar uten utregning/forklaring blir ikke vurdert.

EKSAMEN

Emnekode: LMAT104 GLU 5-10	**Emnenavn:** Geometri, måling, statistikk og sannsynlighetsregning 2 (5-10)
Dato: Onsdag 16. desember 2020	**Eksamenstid:** ? ?
(IDH): Individuell Digital Hjemmeeksamen Alle hjelpemidler (**Uten kontakt med andre personer**)	**Faglærere:** Russell Hatami

Om eksamensoppgaven og poengberegning:

Oppgavesettet består av **4** sider inklusiv denne forsiden og formelark.

Kontroller at oppgavene er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Alle oppgavene skal besvares og er vektet som angitt i oppgavene.

Andre viktige opplysninger:

Alle utregninger skal forklares/begrunnes. Riktig svar uten utregning/forklaring blir ikke vurdert.

Sensurfrist:

Karakterene er tilgjengelige for studenter på Studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. www.hiof.no/studentweb

Lykke til

Fagspesifikke karakterbeskrivelser

Beskrivelsen under er veiledende i forhold til å sette karakter, derfor må besvarelsen også vurderes i sin helhet.

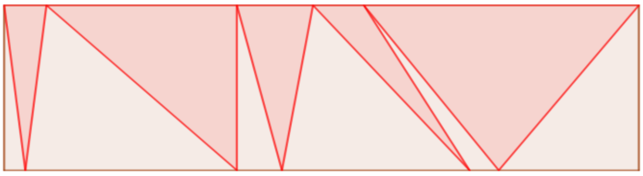
Symbol	Betegnelse	Beskrivelse
A	Fremragende	Generelt: Fremragende prestasjon der kandidaten har løst problemer som krever fantasi og innsikt. Besvarelsen viser at kandidaten fullt ut behersker både de begrepsmessige, regnetekniske og anvendelsesmessige delene av emnet. Fremstillingen er klar og presis med korrekt bruk av notasjon og fagterminologi. Noen få mindre feil eller blanke punkter kan tillates. Klart ca 92% av besvarelsen
B	Meget god	Generelt: Meget god prestasjon der kandidaten har løst problemer som går utover det rutinemessige, og som krever god oversikt over emnet. Besvarelsen viser meget god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset. Fremstillingen er klar og med stort sett riktig bruk av terminologi og notasjon. Klart ca 80% av besvarelsen
C	God	Generelt: Gjennomsnittlig prestasjon der kandidaten har løst oppgaver av middels vanskelighetsgrad fra de fleste deler av kurset. Besvarelsen viser god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har ikke i særlig grad klart å anvende sine ferdigheter og kunnskaper på oppgaver som går ut over det rutinemessige. Fremstillingen er grei å forstå, men kan ha en del formelle mangler. Klart ca 60% av besvarelsen
D	Nokså god	Generelt: Prestasjon under gjennomsnittet der kandidaten har løst eller kommet et stykke på vei med oppgaver fra flere sentrale deler av kurset. Besvarelsen viser kjennskap til de viktigste teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har vanskelig for å komme helt i mål selv på rutinepregede oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men kan ha en god del formelle mangler. Klart ca 47% av besvarelsen
E	Tilstrekkelig	Generelt: Prestasjon som tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Besvarelsen viser at kandidaten har kjennskap til begreper, teknikker og anvendelser fra flere deler av kurset, og

		at han/hun til en viss grad kan bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men røper klare feil og misforståelser. Klart ca 40% av besvarelsen
F	Ikke bestått	Generelt: Prestasjon som ikke tilfredsstiller minimumskravene. Besvarelsen viser at kandidaten har manglende kjennskap til sentrale teknikker, begreper og anvendelser, eller manglende evne til å bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Besvarelser som bare viser beherskelse av en avgrenset del av emnet, vil normalt havne i denne kategorien.

Att matematiken och matematikdidaktiken integreras, är huvudpelaren och den bärande väggen i matemaikinlärning och undervisning, annars har vi Matematik och pedagogik såsom två olika områden som har inget gemensamt! Men någr få kommentarer försökte jag synliggöra detta lite närmare, ...

OPPGAVE 1 5%

Hvor stor prosent av rektangelens areal er de røde områdene sammen?



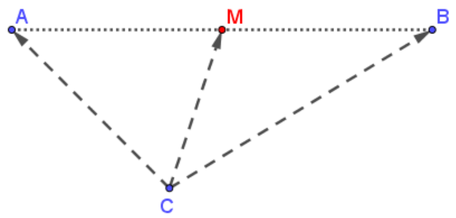
Lös. Summan av alla trianglarnas bas är lika som en sida av rektangel och deras höjd är lika som andra sidan av rektangeln. Alltså de röda områden är tillsamans då hälften så stor som rektangelns area. **Svar: 50%**

Didaktisk kommentar: begreppsförståelse, begreppsförhållande, utledning av areal

OPPGAVE 2 6%

La *A*, *B* og *C* være tre vilkårlige punkter, og la *M* være midtpunktet på *AB*.

Vis at $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right)$



La oss se på ΔACM: $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CM}$

La oss se på ΔBCM: $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CM}$

Summen av begge likheter gir følgende: $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{CM}$

Siden M er midtpunktet, så $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{BM}$ => $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{CM}$

$$=> \quad \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CM} \quad => \quad \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right)$$

Didaktisk kommentar: Begreppsförståelse, triangel, vektor.

OPPGAVE 3 17%

Karins timelønn er 130 kr og Kalles timelønn er 120 kr. De har til sammen arbeidet 24 timer. Hvor mange timer har hver av dem arbeidet, hvis de til sammen har fått 2970 kr i lønn? Du skal løse oppgaven med ulike metoder som passer for ulike skoletrinn. Følgende hjelp er gitt for de ulike løsningsmetodene:

- **I.** **Resonnement der du benytter deg av enkle begrunnelser og beregninger. Du kan tegne figurer hvis du ønsker. 3%**
- **II.** **Med hjelp av en tabell. Argumenter hvorfor bruk av tabellen er viktig til å være et utgangspunkt for å jobbe med en likning. 3% + 2%**
- **III.** **Bruk den matematiske modellen "likning" for å løse problemet. 3%**
- **IV.** **Bruk den matematiske modellen "likningssett" for å løse problemet**
  - **a) algebraisk 3%**

b) grafisk (kan bruke GeoGebra) 3%

Didaktisk kommentar: Begreppsförståelse, språk från första och andra ordning samt översättningsbron; från retorisk matematik till symbolisk matematik, från aritmatik till Algebra och funktionslära, från ordresonemang till symbolresonemang, matamtisk modellering. Problemet har egenskapen av Stenrika problem (se artikeln i Nämnaren 2019/3). ...

Sammenfatning:

$$timlön: \begin{cases} Karin \ \dfrac{130kr}{t} \\ Kalle \ \dfrac{120kr}{t} \\ Karin\ 20\text{kr/t mer än Kalle.} \end{cases} \qquad för\ 24t\ fick\ de\ tillsammans\ 2970$$

I. **Resonemang:**

De får minst i kr. $24 \cdot 120 = 2880kr$ i lön om det vore timlönen för båda 110kr. De fick 2820kr. Mellanskillnaden $2970 - 2880 = 90$ i kr, måste tillhöra Karins lön. Hon har 10kr/t mer än Kalle. Så undersöker vi hur många 20 ryms i 180.

$$\frac{90}{10} = 9,$$

Vilket innebär att

Svar: Karins totala arbetstimmar var 9. Härmed Kalle arbetade 15 timmar.

II. **Tabell:** Vi kan prova fram tills vi får ett korret løsning. **3%**

Totala abets-timmar	Karins antal arbets-timmar	Kalles antal arbets-timmar	lön för både Karin och Kalle	Jæmførelse	Beslut
24	10	(24 – 10) =14	$10 \cdot 130 + 14 \cdot 120 = 2980$	$2980 > 2970$	Nej
	9	(24 – 9) =15	$9 \cdot 130 + 15 \cdot 120 = 2970$	$2970 = 2970$	YES!

Svar: Karins totala arbetstimmar var 9. Härmed Kalle arbetade 15 timmar.

Før att kunna ha koll på vårt arbete kan vi samla all de val som vi gør i en tabell. Detta før att kunna strukturera vårt arbete. Eller rättare sagt, upptäcka strukturen i våra beräkningar för att kunna komma från aritmetiken till algebra. Det viktiga med tabellen är dess bokföring där de operationer som tillhør tabellen kan synliggöra den strukturella egenskapen vid gissning i aritmetik som kräver en subtraktion, vilket utförs av eleverna i form av huvudräkning. T.ex. är det vitktigt att skriva $(24 - 10)$ istället för 14. Detta är grunden før när vi väljer antal timmar för Karin som *x*, så får vi antal timmar för Kalle genom subtraktionen (24 – *x*). På så sätt synliggörs strukturen och bygger vi bron från aritmetik till Algebra. Alltså kommer vi till lösningsmetoden III där vi använder oss av matematiska modellen *likning*. **2%**

Kommentar: Eleverna som även är vana vid räkning i aritmetiken kan ändå få svårighet när de arbetar med symbolisk algebra. Dvs. övergången från procedurräkning till strukturellt tänkande, där operationer ger inget bestämd tal som svar, kan skapa hinder för att kunna gå vidare i sina beräkningar. Så eleverna kan med hjälp av tabell och resonemang få chansen att abstrahera så att från procedurräknandet komma i strukturellt tänkandet, vilket kan bygga en bro mellan räkning og algebra, där olika symboler liksom bokstæver og dylik spelar stor roll. Vi kan tolka detta med Høines tolkning som översättningsleden från första språk till andra språk.

III. Matematiska modellen **likning:** Låt *x* vara representanten før Karins antal arbetstimmar. Alltså Kalles antal arbetstimmar är lika med (24 – *x*).
Enligt uppgifter har Karin respektive Kalle 130kr/t och 110kr/t. Vi kan uttrycka deras lön tillsammans med hjälp av detta i följande form; där första respektive andra leden är Karins respektive Kalles lön. Tillsammans är lika med 2820kr.

$$x \cdot 130 + (24 - x) \cdot 120 = 2970.$$
$$130x - 120x + 120 \cdot 24 = 2970$$
$$10x = 2970 - 2880$$
$$10x = 90$$
$$x = \frac{90}{10} = 9.$$

Svar: Karins totala arbetstimmar var 9. Härmed Kalle arbetade 15 timmar

IV. Matematiska modellen **likningssett**:

a) Algebraisk Anta Karins respektive Kalles antal timmar *x* respektive *y*. Nu kan vi omskriva uppgiftens information så här:

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ 130x + 120y = 2970 \end{cases}$$

$y = 24 - x$ insättes i andra likningen, så får vi $130x + 120(24 - x) = 2970$

$$130x - 120x + 120 \cdot 24 = 2970$$
$$10x = 2970 - 2880 = 90$$
$$x = \frac{90}{10} = 9.$$

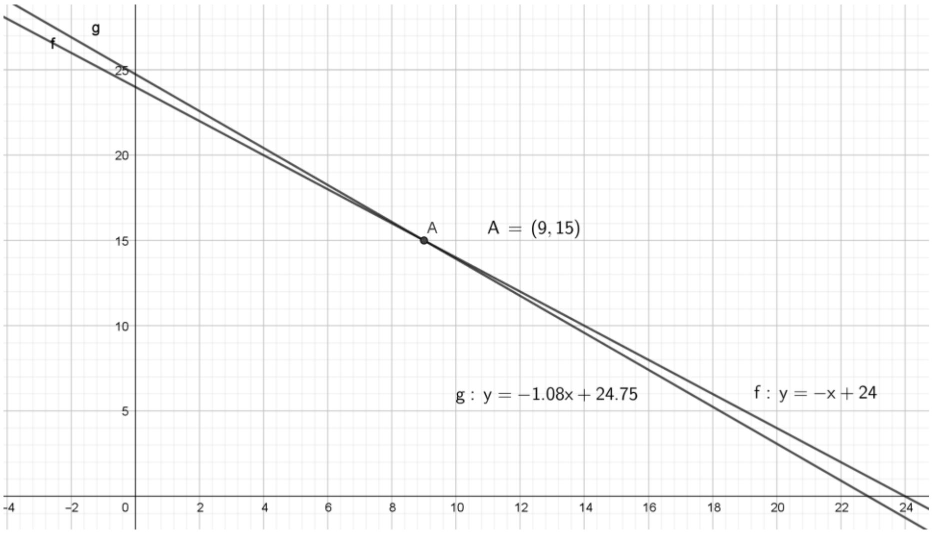
Som ger $y = 24 - 9 = 15$.

Svar: Karins totala arbetstimmar var 9. Härmed Kalle arbetade 15 timmar

b) Grafisk lösning

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ 130x + 120y = 2820 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 24 \\ 13x + 12y = 297 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 24 \\ y = -\frac{13}{12}x + \frac{297}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 24 \\ y = -\frac{13}{12}x + \frac{99}{4} \end{cases} ca. \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 24 \\ y = -1{,}08x + 24{,}75 \end{cases}$$



Svar: Karins totala arbetstimmar var 9. Härmed Kalle arbetade 15 timmar

OPPGAVE 4 6%

På periferien av en sirkel markerer vi 11 punkter. Vis med utregning, hvor mange mulige firkanter kan man få ved å koble disse punktene sammen.

Detta är liksom handskakning urval uten tilbakelegging där ordningen icke är väsentlig (Uordnede). Alltså när person 1 skakar hand med person 2 är detsamma som person 2 skakar hand med person 1; dvs. kombinatorik; $nCk = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

På hur många olika sätt kan vi bilda grupper med 4 melemmar där ordningen har ingen betydelse (mellan de fyra inblandade gruppmedelemmarna)

$$\binom{11}{4} = \frac{11!}{4!\,7!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 7!} = 11\cdot 10\cdot 3 = 110\cdot 3 = 330.$$

Didaktisk kommentar: Begreppsförståelse sådan att egentligen vikten att sannsynlighetsproblem är mycket kontestuellt. Egentiligen behövs inte onödiga beskrivelse att urvalet är med eller utan tillbaka läggning eller om ordningen har betydelse eller ikke, dessa förstås om begreppets betydelse kommer upp i kontesten. ...Enkelare oppgaven är handskakning.

OPPGAVE 5 10%

Hva er mest sannsynlig? Å få minst en sekser på 12 kast med en terning, eller å få minst en dobbel sekser på 48 kast med to terninger. Begrunn svaret med utregninger, skriv svarene i prosent, avrundet til to desimaler.

Lös.

a) **Å få minst en sekser på 12 kast:** Eftersom kan vi dela hela utfallsrummet i två delgrupper; få sexa och ikke sexa, så kan vi använda oss av komplementet till *minst en sexa*, som är *ingen sexa*.dvs.

P(minst en sexa) är lika med (1 – ”inget sexa”).

$$P(minst\ en\ sexa) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} = 1 - \frac{5^{12}}{6^{12}} \approx 0.88784 = 88{,}784 \approx 88{,}78\%.$$

Sannolikheten att vid tolv kast av en terning få minst en sexa är 88,78%.

b) **å få minst en dobbel sekser på 48 kast med to terninger**: Vi använder oss av komplementet till *minst en dubbelsexa*, som är *ingen dubbelsexa*, vilket är 35 av 36 utfallen. Alltså får vi

P(minst en dubbelsexa) är lika med (1 – ”inget dubbelsexa”).

$$P(minst\ en\ dubbelsexa) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{48} \approx 0{,}74133 = 74{,}13\%.$$

Sannolikheten att vid fyra kast av en terning få minst en sexa är 74,13%.

Svar: Fall *a* har högre möjlighet än fall *b*.

Didaktisk – historisk kommentar: Oppgaven historisk varit följande:

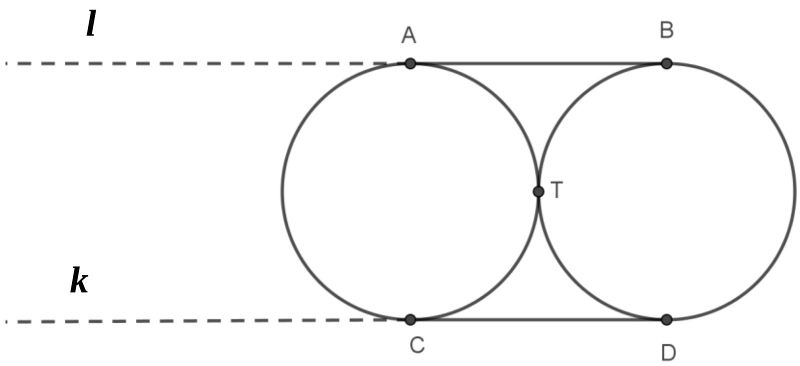
Vad är mest sannolikt? Att få minst en sexa vid fyra kast med en tärning, eller att få minst en dubbel sexa vid 24 kast med två tärningar.

För cirka mer än 360 år sedan löste de franska matematikerna Pierre de Fermat (1607 – 1665), Blaise Pascal (1623 – 1662) detta problem fast inte så enkelt som vi gör idag. Men det viktgaste har det varit att det togs de första stegen i sannolikhetsteorins utveckling.

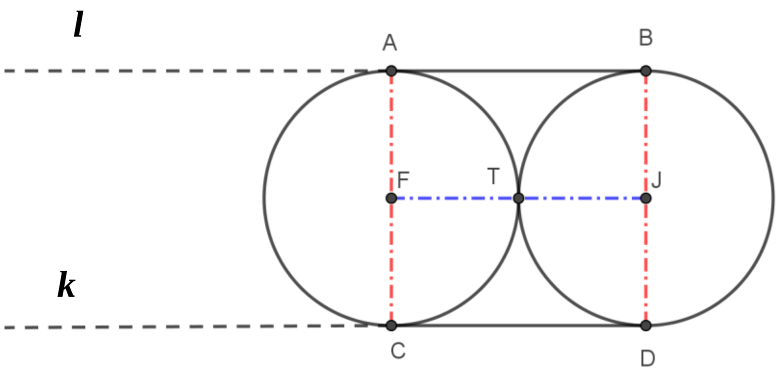
Vi, idag tackvare *Mängdläran* (grundaren: Georg Cantor 1845 – 1918), använder vi idag av en super enklare tankemodell, nämligen komplementet till en delmängd. Alltså delmängden som har ingen sex och delmängder som har någon/några sex/or. *Delmängden som inte innehåller någon sexa* är därför *komplementet* till *delmängden som har minst en sexa*.

OPPGAVE 6 8%

To kongruente sirkler med radius r *cm*, tangerer hverandre i punktet T. Linjene *l* og *k* tangerer sirklene henholdsvis i punktene A, B, C og D. Finn arealet av de lukkede områdene utenfor sirklene avgrenset av linjestykkene AB og CD, utrykt med sirkelens radius *r*, vis utregninger. (5%)
Bestem forholdet mellom dette området og arealet til ABDC i prosent avrundet til en desimal. (3%)



Lös.
Cirkels radie är vinkelrät mot tangerings linjerna i punkterna A, B, C och D. Alltså fyrhörningen ABCD är i första hand en rektangel



Eftersom $AC = BD = 2r$ och $AB = CD = FJ = 2r$, så är ***ABDC*** en kvadrat med sidan $2r\ cm$ och arealen $4r^2\ cm^2$. Kvadraten består av två halvcirklar och den önskade arealen. Alltså den önskade arealen i cm^2 är lika med

$$4r^2 - \pi r^2 = r^2(4 - \pi).$$

$$\frac{Områdets\ areal}{ABDC{:}\,s\ areal} = \frac{r^2(4-\pi)}{4r^2} = \frac{4-\pi}{4} \approx 0{,}21460 = 21{,}46 \approx 21{,}5\%$$

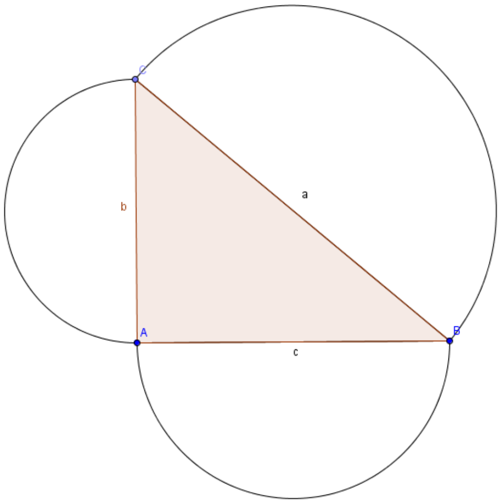
<u>OPPGAVE 7</u> 10%

Pythagoras setning gjelder ikke bare for kvadratene av sidene av rettvinklede trekanter, men også for dannelsen av regulære polygoner på sidene av trekanten. Det samme gjelder setningen for halvsirkler og halvellipser. Velg en av disse tre (regulære polygon, halvsirkel eller halvellipse) og bevis dette.

En av följande tre ger 10%

I. Vi visar att satsen för areor av halvcirklar och därmed för helcirklar

$$A_a = \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi\frac{a^2}{4}}{2} = \frac{\pi a^2}{8}$$



$$A_b = \frac{\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi\frac{b^2}{4}}{2} = \frac{\pi b^2}{8}$$

$$A_c = \frac{\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi\frac{c^2}{4}}{2} = \frac{\pi c^2}{8}$$

$$\frac{\pi a^2}{8} = \frac{\pi b^2}{8} + \frac{\pi c^2}{8}?$$

$$\frac{\pi}{8}\,a^2 = \frac{\pi}{8}b^2 + \frac{\pi}{8}c^2$$

Ettersom $a^2 = b^2 + c^2$ så gäller $na^2 = nb^2 + nc^2$ for alle reella tal n. Detta betyder att man också kan använda halvcirklar.

II. Vi visar att detta gäller för ellipser.

Intressant är att detta gäller även för likformiga **halvellipser/ellipser**. Eftersom två ellipser är likformiga om förhållandet mellan deras axlar är lika. Vi kan välja a, b, respektive c som stora axlar för tre ellipser med respektive lilla axlarna $L_a,\ L_b,\ L_c$.

Enligt likformihet har vi

$$\frac{a}{L_a} = \frac{b}{L_b} = \frac{c}{L_c} = k.$$

Därifrån får vi

$$L_a = \frac{a}{k}, \qquad L_b = \frac{b}{k}, \qquad L_c = \frac{c}{k}.$$

Ellipsens area är lika med $stora\ axeln \times lilla\ axeln \times \pi$. Så för de tre ellipserna har vi följande areor:

$$A_a = \pi a \cdot L_a, \qquad A_b = \pi b \cdot L_b, \qquad A_c = \pi c \cdot L_c\,.$$

Eller

$$A_a = \pi a \cdot \frac{a}{k} = a^2 \cdot \frac{\pi}{k}, \qquad A_b = \pi b \cdot \frac{b}{k} = b^2 \cdot \frac{\pi}{k}, \qquad A_c = \pi c \cdot \frac{c}{k} = c^2 \cdot \frac{\pi}{k}.$$

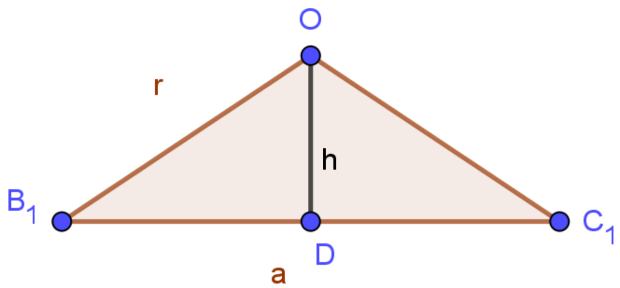
Härifårn kan vi visa att detta gäller för ellipser också genom att multipcera båda sidorna med $\frac{k}{\pi}$

III. Vi visar att detta gäller för regelbundna månghörnigas areor.

Välj regelbundne ABCDE …

Varje vinkel i en regulbunden $\boldsymbol{n}$ – hörning ABCDE … er lika med $v = \frac{(n-2)\cdot 180}{n}$

$$B_1 = C_1 = \frac{A}{2} = \frac{B}{2} = \frac{C}{2} \dots = \frac{v}{2} = \frac{(n-2)\cdot 180}{n} = \frac{(n-2)\cdot 90}{n}.$$



a som side til Regulære mangekant ABCDE…

$OB_1 = OC_1 = r$, radius til den omskreven sirkel

$$\tan(B_1) = \tan\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{h}{\frac{DB_1}{2}} = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{2h}{a}.$$

$$h = \frac{a \cdot \tan\left(\frac{v}{2}\right)}{2}.$$

Därmed area för regelbunda månghörningar med sidorna a, b och c (två kateter och hypotenusan) är enligt följande:

$$A_a = na^2 \cdot \frac{\tan\left(\frac{v}{2}\right)}{2},\ A_b = nb^2 \cdot \frac{\tan\left(\frac{v}{2}\right)}{2} \text{ och } A_c = nc^2 \cdot \frac{\tan\left(\frac{v}{2}\right)}{2}.$$

Vi kan visa att följande gäller genom att resonera eller multuplicera båda sidorna med $\frac{2}{n\cdot\tan\left(\frac{v}{2}\right)}$.

$$na^2 \cdot \frac{\tan\left(\frac{v}{2}\right)}{2} = nb^2 \cdot \frac{\tan\left(\frac{v}{2}\right)}{2} + nc^2 \cdot \frac{\tan\left(\frac{v}{2}\right)}{2}.$$

Dvs.

$$\frac{2}{n \cdot \tan\left(\frac{v}{2}\right)} \cdot na^2 \cdot \frac{\tan\left(\frac{v}{2}\right)}{2} =$$

$$= \frac{2}{n \cdot \tan\left(\frac{v}{2}\right)} \cdot nb^2 \cdot \frac{\tan\left(\frac{v}{2}\right)}{2} + \frac{2}{n \cdot \tan\left(\frac{v}{2}\right)} \cdot nc^2 \cdot \frac{\tan\left(\frac{v}{2}\right)}{2} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2. \boldsymbol{QED}$$

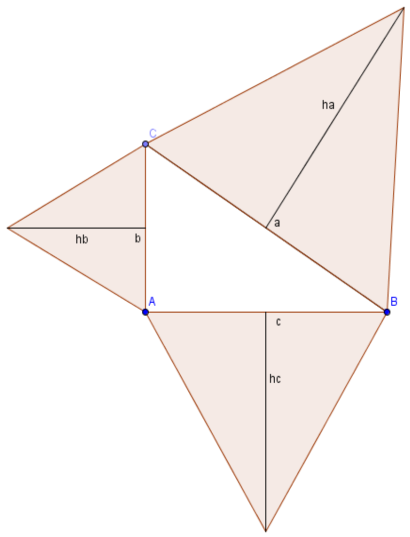
Enkel exempel; liksidiga trianglar:
Vi bestämmer höjden:

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + {h_a}^2$$
$$a^2 = \frac{a^2}{4} + {h_a}^2$$

$${h_a}^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$h_a = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

$$h_a = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$



Tilsvarende blir det for høydene h_b og h_c:
$h_b = \frac{b}{2}\sqrt{3}$ og $h_c = \frac{c}{2}\sqrt{3}$

Trianglarnas areor är:

$$A_a = \frac{a\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}}{2} \qquad A_b = \frac{b\cdot\frac{b}{2}\sqrt{3}}{2} \qquad A_c = \frac{c\cdot\frac{c}{2}\sqrt{3}}{2}$$

$$A_a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \qquad A_b = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \qquad A_c = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$$

Vi kontroller om följande gäller:

$$A_a = A_b + A_c$$

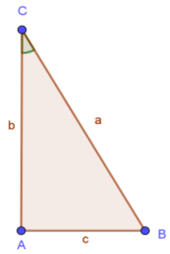
$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$ Multiplicirar vi alla termerna med $\frac{4}{\sqrt{3}}$ får vi

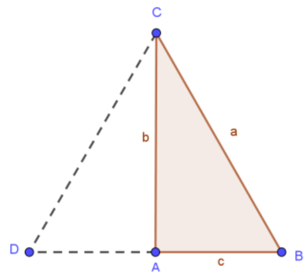
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Pedagogisk kommentar: Här kan vi även uppleva matematikens skönhet och dess fascination; liksom poesin men i sin djupaste tänkande får med fantasins vingar flyga vart som helst! Eksamen ska fungerar som en inlärnings tillfälle som sätter spår i lärandeprocessen.

<u>OPPGAVE 8</u> 6%

Bevis at i en rettvinklet trekant med en vinkel på 30 grader er den korteste kateten alltid halvparten av hypotenusen. Bruk et bevis som skal passe for et grunnskolenivå.





I triangel ABC är vinkel C lika med 30 grader. Vi ska bevisa att $AB = \frac{BD}{2}$.

Lämplig bevis för grundsolan kan vara t.ex.:

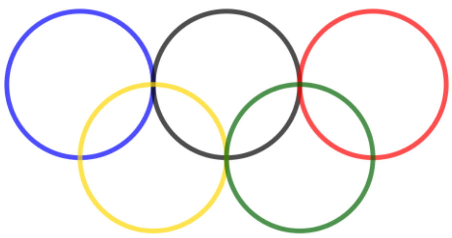
Spegelbilden på denna triangel i AC kan vara triangel ADC. På grund av att dessa två trianglar är kongruenta upptäcker vi triangeln BCD är liksidig dvs. $BD = CD = BC$. Eftersom $AB = \frac{BD}{2}$, betyder att $AB = \frac{BC}{2}$. QED!

Alternativet kan vara att studenten börjar med en liksidig triangeln och ritar halveringsstrållen och det blir ungefär samma, där hen kan skriva liksom att halveringssstrålle och höjden (eller mittpunktnormalen) är detsamma i liksidig trianngeln och därmed kan bevisa att motstående sida mot vinkel 30 grader är halva hypotenusan.

Didaktisk kommentar. Begreppsförhållande och förståelse av trianglar. Här egentligen kan kopplas geometri till trigonometri och utvecklas vidare ...

OPPGAVE 9 8%

I de ni områdene opprettet av de olympiske sirklene, skal tallene fra 1 til 9 plasseres slik at summen av tallene i hver ring er lik. Hvert tall skal bare brukes én gang. Finn alle mulige løsninger.



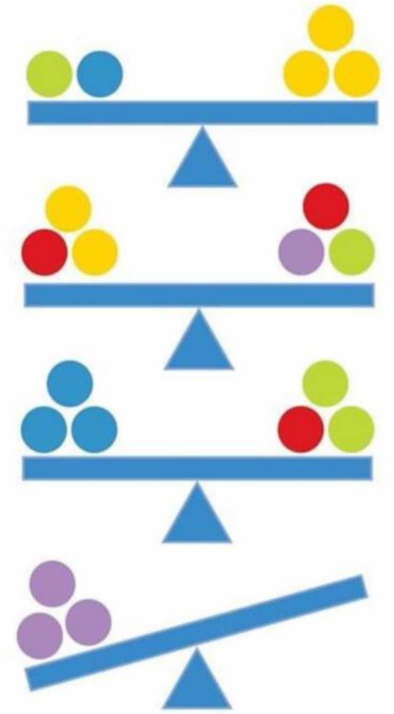
Tre mittersa ringarna (**Asien, Afrika, Oceanien**) kommer att innehålla tre olika tal. Härmed ingen av dessa tre ringarna får innehålla 8 eller 9. Dessa får placeras i de två sidoringarna (**Europa och Amerika**). Så kan vi testa fram och få minst en lösning där

Fall 1: 4%
Europa: 9 + 2 Amerika: 8 + 3, Afrika 2 + 5 + 4, Asien 6 + 4 + 1 och Oceanen 1 + 7 + 3

Fall 2: 4%
Europa: 8 + 3 Amerika: 9 + 2, Afrika 3 + 7 + 1, Asien 6 + 1 + 4 och Oceanen 4 + 5 + 2

OPPGAVE 10 10%

I vektstengene nedenfor veier vektstengene som har samme farge like mye. Gjenstandene/sirklene kan veie 1, 2, 3, 4 eller 5 kg. Hvor mange gule gjenstander/sirkler skal være til høyre for den fjerde vektstanga for å opprettholde balansen?



Metodisk kommentar. Sammanfattnigsvis vet vi att varje färg kan vara representant bara för en enda vikt som kan vara lika med en av vikterna 1 - 5 kg. För enkelhetens skull kallar jag dessa, balansvåg (**BV**). **I – IV**.

Lösningsförslag.

BV IV. $3\ lila\ =\ x\ gul$. Vid beov kan vi skriva frågetecknet istället för *x*.

Vi kan utgå alla de möjligheterna som **Lila** vikt kan ha. Sedan kan vi se hur många ***Gula*** vikt behövs för att väga lika mycket i båda sidorna av vågen. Alltså finns det följande möjligheter:

$$3 \cdot \mathbf{1} = 1 \cdot \mathbf{3} = 1 \cdot \boldsymbol{Gul}$$

$$3 \cdot \mathbf{2} = 2 \cdot \mathbf{3} = 2 \cdot \boldsymbol{Gul}$$

$$3 \cdot \mathbf{4} = 4 \cdot \mathbf{3} = 4 \cdot \boldsymbol{Gul}$$

$$3 \cdot \mathbf{5} = 5 \cdot \mathbf{3} = 5 \cdot \boldsymbol{Gul}$$

Vi har inte valt alternativet $3 \cdot \mathbf{3} = 3 \cdot \mathbf{3} = 3 \cdot \boldsymbol{Gul}$. Eftersom enligt oppgaven är varje färgen, representat för en av dessa 5 vikterna. Alltså måste vikten på en ***Gul*** vara lika med 3. Men vikten för en **Lila** får inte vara 3. Den kan vara en av dessa fyra möjligheterna **1, 2, 4** eller **5**.

$$\boxed{Gul = 3}$$

BV I. $\boldsymbol{Grön} + \boldsymbol{Blå} = 3\ Gul\ \ dvs. = \mathbf{9}$. Eftersom i denna kontext är enbart $4 + 5 = \mathbf{9}$, ger detta enbart följande parsvaren till $\boldsymbol{Blå}$ och $\boldsymbol{Grön}$:

$$\boldsymbol{Blå} = \mathbf{5}, \quad \boldsymbol{Grön} = \mathbf{4}, \quad \boldsymbol{eller}\ \ \boldsymbol{Blå} = \mathbf{4}, \quad \boldsymbol{Grön} = \mathbf{4}.$$

BV III. $\mathbf{3}\boldsymbol{Blå} = \boldsymbol{Röd} + \mathbf{2}\boldsymbol{Grön}\ = \mathbf{9}$

a) $\boldsymbol{Blå} = \mathbf{5},\ \boldsymbol{Grön} = \mathbf{4}$, som ger $\boldsymbol{Röd} = \mathbf{7}$, vilket är ikke ligger i svars intervallet. Alltså måste

b) $\boxed{\boldsymbol{Blå} = \mathbf{4}, \quad \boldsymbol{Grön} = \mathbf{4}}$, vilket ger $\boxed{\boldsymbol{Röd} = \mathbf{2}}$.

Alltså enda lediga platsen för $\boldsymbol{Lila}$ är **1**.

Svar: 1 gul motsvarar 3 lila.

Vi kan kontrollera om vårt svar är korrekt, genom att prova i alla dessa fyra balansvågarna. Om den instämmer i alla 4, så bör vara korrekt lösning.

Didaktisk kommentar oppgave 9 och 10. Resonemang och kommunikations förmågor (kompatanse) är centrallt i detta rika problemlösning. Inbjudande, utmanande och inkluderande problem till alla elever.

OPPGAVE 11 6%

I en jusblanding er det 20% konsentrert jus og 80% vann. Ved å tilsette 10 *cl* konsentrert jus, øker dens andel i blandingen til 30%. Hvor mye vann og hvor mye konsentrert jus er det i den nye jusblandingen?

Didaktisk – medotdisk kommentar: Vi har både förhållande och mängden, vilka spelar roll. Detta kan många gånger skapa förvirring. Därför är extra viktigt att kunna dela problemet sådan att tydliggörs vad som gäller. Vi är tvungna att utgå från någon mängd antingen den ursprungliga eller den andra.

Här nedan försöker vi lösa på två olika sätt. I första varianten kan vi utgå från saft mängeden som har funnits från början och i andra lösningsvrianten tar vi utgångspukten i mängden saft efter tillsättning av 10dl konceterad. Eftersom lösningsmetoden är detsamma, men det görs på två olika varianter, så kallar vi de *lösningsvarianter till en och samma metod.*

Lösningsvariant 1:

Vi antar att ursprungliga blandningen har en mängd på $\boldsymbol{u}\ cl$. Alltså har vi

$$0{,}2u = \text{koncenterad} \quad \text{och } 0{,}8u = \text{vatten.}$$

Efter 10 cl tillsättning av koncenterad får vi $0{,}2u + 10 = \text{koncenterad}$ men mängden vatten är fortfarande oförändrad; dvs. den ursprunliga vattenmängden som är $0{,}8u = \text{vatten}$.

Dessa mängder (koncenterad och vatten) har, enligt information, följande förhållandet:

$$\frac{0{,}2u + 10}{0{,}8u} = \frac{30\%}{70\%} \Leftrightarrow \frac{0{,}2u + 10}{0{,}8u} = \frac{30}{70}.$$

$$\frac{0{,}2u + 10}{0{,}8u} = \frac{30}{70} \Leftrightarrow \frac{0{,}2u + 10}{0{,}8u} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow 2{,}4u = 1{,}4u + 70.$$

Löser vi likningen, så får vi $u = 70\ cl$, vilket har ursprungligen 20% respektive 80% koncenterad respektive vatten. Dvs. $14\ cl$ koncenterad och $56\ cl$ vatten. Alltså den nya saften har

<u>**Svar:** $24\ cl$ koncenterad och $56\ cl$ vatten</u>

Lösningsvariant 2:

Efter tillsättningen av **10*cl*** av koncentrerad har vi ***ny mängd*** som vi kallar den $\boldsymbol{n}\ cl$, sådana att

$$0{,}3n = \text{koncenterad} \quad \text{och } 0{,}7n = \text{vatten.}$$

I ursprungliga Saften hade vi alltså volymenheter så har vi i **saft II**:

$$0{,}3n - 10 = \text{koncenterad och } \ 0{,}7n = \text{vatten.}$$

Deras förhållande i den ursprungliga saften varit

$$\frac{0{,}7n}{0{,}3n - 10} = \frac{80\%}{20\%}.$$

$$\frac{0{,}7n}{0{,}3n - 10} = \frac{80}{20} \Leftrightarrow 24n - 800 = 14n.$$

Löser vi likningen får vi svaret på den nya saftmängden $n = 80\ cl$, vilket innehåller 30% respektive 70% koncenterad respektive vatten. Alltså har vi:

<u>**Svar:** $24\ cl$ koncenterad och $56\ cl$ vatten</u>

<u>OPPGAVE 12</u> 8%

En matematikklærer skal reise fra jernbanestasjonen i Halden til Remmen. 2/3 av turen reiser han med buss, og resten gjøres går til fots. Det viser seg at turen tok tre ganger så lang tid som bussreisen. Hvor fort gikk matematikklæreren i forhold til bussen? Du skal løse oppgaven på to forskjellige måter som angit nedenfor. Gjør buk av følgende løsningsmetoder når du løser oppgaven:

I. Resonnement der du benytter deg av enkle begrunnelser og beregninger.
II. Symbolske.

Vi vet att fart $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$. Frågan handlar om förhållandet mellan ***p***romenadsfarten ($v_{\boldsymbol{p}}$) och ***b***ussfarten ($v_{\boldsymbol{b}}$). Dvs.

$$\frac{v_{\boldsymbol{p}}}{v_{\boldsymbol{b}}} = ?$$

Metod 1. Resonerande:

$\frac{1}{3}$ av vägen tog 3 gånger så lång tid som bussens hade gått $\frac{2}{3}$ av vägen. Alltså för $\frac{2}{3}$ av vägen bör tas $2 \cdot 3 = 6$ gånger så lång tid som bussens. Alltså

$$\frac{v_{\boldsymbol{p}}}{v_{\boldsymbol{b}}} = \frac{1}{6}.$$

Metod 2. Symbolisk:

$v_{\boldsymbol{b}}$ og respektive $v_{\boldsymbol{p}}$ som bussen og respektive promenadens hastighet samt t som tiden for bussreisen.

$$v_{\boldsymbol{b}} = \frac{\frac{2s}{3}}{t} = \frac{2s}{3t}$$

och

$$v_{\boldsymbol{p}} = \frac{\frac{s}{3}}{3t} = \frac{s}{9t}.$$

$$\frac{v_{\boldsymbol{p}}}{v_{\boldsymbol{b}}} = \frac{\frac{s}{9t}}{\frac{2s}{3t}} = \frac{s \times 3t}{9t \times 2s} = \frac{1 \times 1}{3 \times 2} = \frac{1}{6}.$$

Didaktisk kommentar oppgaver 11 och 12. Begreppsförstelse av förhållandebegreppet som en guldsten i aritmetik, algebra, geometri och inte minst funktionsläran där alla dessa områden möts.