Høgskolen i Østfold

SENSORVEILEDNING

Emnekode:	LMUMAT10119 LMAT10119
Emnenavn:	Tall, statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet
Eksamensform:	Individuelt, skriftlig
Dato:	16. desember 2020
Faglærer(e):	Monica Nordbakke (emneansvarlig) Henrik Stigberg Natalia Bredrup
Eventuelt: Sensorveiledningen består av 26 sider	

Innhold

Denne sensorveiledningen inneholder:

1. Om eksamen i emnebeskrivelsene
2. Andre opplysninger om eksamen
3. Vurderingskriterier for den enkelte karakter
4. Oppgavene med stikkordsmessig løsningsforslag

1. Om eksamen i emnebeskrivelsene

Skriftlig, seks timers individuell eksamen.

Kandidaten prøves både i matematikkfaglige og matematikkdidaktiske oppgaver.
Tillatt hjelpemiddel: godkjent kalkulator.

Karakterregel: A-F

2. Andre opplysninger om eksamen

Dato og tidspunkt: 16. desember 2020.

Antall kandidater: Det er ca. 53 studenter oppmeldt til eksamen.

Sted: Fysisk tilstedeværelse ved campus Remmen i Halden

3. Vurderingskriterier for den enkelte karakter

	A	B	C	D	E	F
Generelle kriterier Kilde: https://www.uio.no/studier/eksamen/karakterskala/fagspesifikk-karakterbeskrivelse/mn-math.html#skriftlig	**Fremragende** prestasjon der kandidaten har løst problemer som krever fantasi og innsikt. Besvarelsen viser at kandidaten fullt ut behersker både de begrepsmessige, regnetekniske og anvendelsesmessige delene av emnet. Fremstillingen er klar og presis med korrekt bruk av notasjon og fagterminologi. Noen få mindre feil eller blanke punkter kan tillates.	**Meget god** prestasjon der kandidaten har løst problemer som går utover det rutinemessige, og som krever god oversikt over emnet. Besvarelsen viser meget god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset. Fremstillingen er klar og med stort sett riktig bruk av terminologi og notasjon.	**God** Gjennomsnittlig prestasjon der kandidaten har løst oppgaver av middels vanskelighetsgrad fra de fleste deler av kurset. Besvarelsen viser god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har ikke i særlig grad klart å anvende sine ferdigheter og kunnskaper på oppgaver som går ut over det rutinemessige. Fremstillingen er grei å forstå, men kan ha en del formelle mangler.	**Nokså god** Prestasjon under gjennomsnittet der kandidaten har løst eller kommet et stykke på vei med oppgaver fra flere sentrale deler av kurset. Besvarelsen viser kjennskap til de viktigste teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har vanskelig for å komme helt i mål selv på rutinepregede oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men kan ha en god del formelle mangler.	**Tilstrekkelig** Prestasjon som tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Besvarelsen viser at kandidaten har kjennskap til begreper, teknikker og anvendelser fra flere deler av kurset, og at han/hun til en viss grad kan bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men røper klare feil og misforståelser.	**Ikke bestått** Prestasjon som ikke tilfredsstiller minimumskravene. Besvarelsen viser at kandidaten har manglende kjennskap til sentrale teknikker, begreper og anvendelser, eller manglende evne til å bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Besvarelser som bare viser beherskelse av en avgrenset del av emnet, vil normalt havne i denne kategorien.
Prosent av besvarelsen som kan indikere karakter	[92% - 100 %]	[77% - 92 %>	[58% - 77%>	[46 % - 58%>	[40 % - 46%>	[0 % - 40%>

Universitets – og høgskolerådet har utformet disse generelle, kvalitative beskrivelsen av de ulike karakterene:

symbol	betegnelse	generell, ikke fagspesifikk beskrivelse av vurderingskriterier
A	fremragende	Fremragende prestasjon som klart utmerker seg. Kandidaten viser svært god vurderingsevne og stor grad av selvstendighet.
B	meget god	Meget god prestasjon. Kandidaten viser meget god vurderingsevne og selvstendighet.
C	god	Jevnt god prestasjon som er tilfredsstillende på de fleste områder. Kandidaten viser god vurderingsevne og selvstendighet på de viktigste områdene.
D	nokså god	En akseptabel prestasjon med noen vesentlige mangler. Kandidaten viser en viss grad av vurderingsevne og selvstendighet.
E	tilstrekkelig	Prestasjonen tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Kandidaten viser liten vurderingsevne og selvstendighet.
F	ikke bestått	Prestasjon som ikke tilfredsstiller de faglige minimumskravene. Kandidaten viser både manglende vurderingsevne og selvstendighet.

4. Stikkordsmessig løsningsforslag på de enkelte oppgavene med forslag på maksimumspoeng

Viktige elementer for vurderingen:

I tabellen nedenfor er det indikert en maksimumspoengsum for hver av deloppgavene, men kun i noen grad utdypet hvordan poeng skal settes utover dette. Det er imidlertid av stor betydning med en helhetlig vurdering.

Oppgave 1		**Oppgave 2**		**Oppgave 3**		**Oppgave 4**		**Oppgave 5**		**Oppgave 6**	
a) i)	2	a)	3	a) i)	1	a)	2	a)	2	a)	2
ii)	2	b)	3	ii)	2	b)	2	b)	2	b) i)	2
iii)	2	c)	2	c)	3	d) i)	2	c) i)	2	ii)	2
a) i)	2,5			c)	2	ii)	2	ii)	2	iii)	4
ii)	2,5			d) i)	1	iii)	2	d) i)	2	c) i)	2
b)	3			ii)	1	iv)	2	ii)	2	ii)	2
d) i)	2			iii)	1	d)	2	e)	4	d) i)	2
ii)	2			e) i)	2	e)	2	f) i)	2	ii)	2
				ii)	2			ii)	2	iii)	2
				f)	3						
Total	**18**	**Total**	**8**	**Total**	**18**	**Total**	**16**	**Total**	**20**	**Total**	**20**

Nedenfor finnes forslag på løsninger. Det vil selvsagt være flere andre fremgangsmåter som kan gi *full uttelling* så her må det vurderes i hvert enkelt tilfelle.

Oppgave 1 (18 %)

a) Gitt følgende tekstoppgave: «Einar pleier å kjøpe to skolebrød som koster 14 kr per stykk, hver dag når han går hjem fra skolen. Hvor mye bruker han på skolebrød hver uke?»

i) Vis to ulike måter å regne ut totalbeløpet på.

Man kan først regne ut hvor mye Einar bruker hver dag og deretter multiplisere med antall ukedager: $(2 \cdot 14) \cdot 5 = 28 \cdot 5 = 140\ kr.$ Eller han kan først regne ut hvor mange skolebrød han kjøper i løpet av en skoleuke, og deretter regne totalbeløpet ved å multiplisere antallet med pris per stykk: $(2 \cdot 5) \cdot 14 = 10 \cdot 14 = 140\ kr.$

i) Forklar og begrunn hvilken algebraisk lov løsningen på denne oppgaven kan kobles til?

Oppgaven handler om den *assosiative loven* for multiplikasjon: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. Loven gjelder rekkefølgen på multiplikasjonene når tre tall multipliseres. Løsningen i oppgaven i) kan også skrives som $5 \cdot (2 \cdot 14) = (2 \cdot 5) \cdot 14$

i) Lag din egen tekstoppgave koblet til virkeligheten der den distributive loven brukes i løsningen. Vis utregning og forklaring.

F.eks. «Einar pleier å kjøpe 1 skolebrød som koster 14 kr og 1 sjokolademelk som koster 18 kr, hver dag når han går hjem fra skolen. Hvor mye bruker han på skolebrød og sjokolademelk hver uke?»

Den distributive loven for multiplikasjon handler om situasjoner med to multiplikasjoner med samme multiplikator, altså $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$. Oppgaven kan løses på begge måter fremstilt henholdsvis på høyre og venstre sider, i dette tilfelle $a = 5$ dager som er felles for begge matvarene, og b og c er henholdsvis prisene for skolebrød og sjokolademelk.

VS: vi regner totalbeløpet for skolebrød Einar bruker i løpet av uke skoleuke, og tilsvarende totalbeløpet for sjokolademelk, og så adderer begge beløpene:

$$5 \cdot 14 + 5 \cdot 18 = 70 + 90 = 160\ kr$$

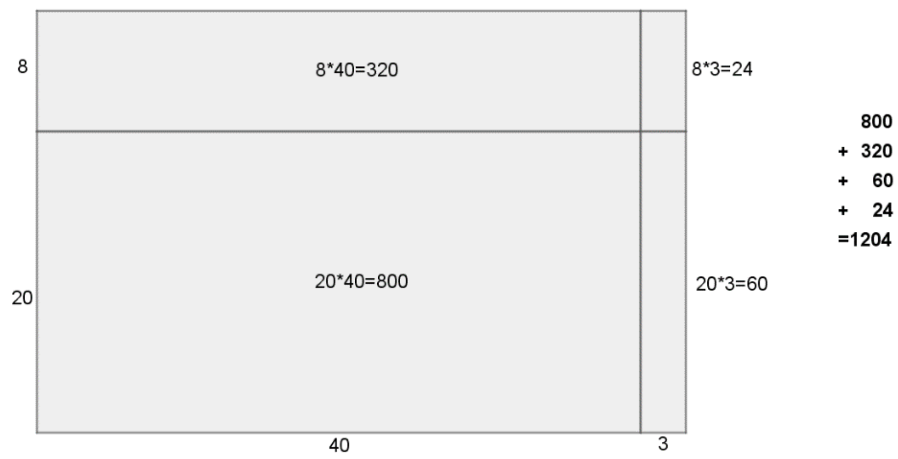
HS: vi regner hvor mye bruker Einar hver dag, og multipliserer med antall dager:

$$5 \cdot (14 + 18) = 5 \cdot 32 = 160\ kr$$

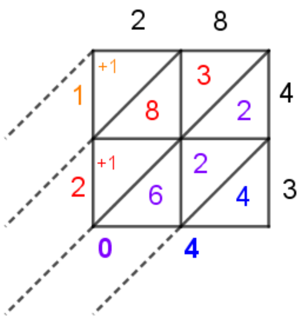
b) Gitt følgende multiplikasjonsoppgave: $28 \cdot 43$.

Løs oppgaven ved å bruke følgende metoder:

i) geometrisk visualisering



ii) **gittermetoden** Man skal multiplisere alle sifferpar og skrive resultat i hver rute, hvis produktet er et tosifret tall, så skrives tierne over skråstrek, og enere under. F.eks. $8 \cdot 3 = 24$, og 2 står over streken, mens 4 står under. Disse skråstrekene viser til tierovergang. Nederste høyre hjørne er enere (blå felt), neste felt er tiere (lilla) – legg merke til at 6 + 2 + 2 = 10, og det skjer overgang til neste felt (rød for hundre). Man kan skrive minnetallet «+1» med liten skrift. Tilsvarende blir det overgang fra hundrere til tusener: 8 + 3 + 1 (minnetall) = 12, der 2 blir i det røde hundrefeltet, mens «+1» går til tsener. Vi leser svaret utenfor gitteret, fra venstre topp hjørne nedover og til høyre: 1204.



c) **Du har lest artikkelen «Hvilken rolle har skriftlige regnemetoder på barnetrinnet?» av Alseth og Røsseland. Hvordan kan du koble innholdet i denne artikkelen opp mot multiplikasjonsoppgaven i b)?**

Det viktigste er at elevene skal klare å løse problemer og kunne kommunisere i og med matematikk. Da må elevene ha en forståelse for hva de driver med. En måte som kan gi forståelse er å visualisere og koble multiplikasjon til areal (se løsningsforslag 1bi). Gittermetoden kan gi forståelse for plassverdisystemet. Det er viktig at elevene kan utvikle ulike metoder og ikke er låst til en bestemt måte som må følges uansett.

d) **I denne oppgaven tas det utgangpunkt i divisjonsoppgaven $18 : 5$. Et eksempel på *delingsdivisjon med rest som regnes med* kan gis med følgende tekstoppgave: «18 barn skal i en bursdag, og det er fem like store bord til disposisjon. Hvor mange sitteplasser må det minst være ved hvert bord?»**

i) **Ta utgangspunkt i den samme divisjonsoppgaven, $18 : 5$. Hvordan vil du formulere en tekstoppgave som viser til *målingsdivisjon med rest som regnes med*?**

«18 barn skal i en bursdag, og de skal settes på 5 barn ved hvert bord. Hvor mange bord må man ha minst for å plassere alle barn?»

i) **Man kan bruke en tallinje for å vise at divisjon kan ses som gjentatt subtraksjon. Begrunn hvilken av de to oppgavene (delings- eller målingsdivisjonen) som passer til å bli forklart ved hjelp av tallinja.**

Målingsdivisjon kan vises ved hjelp av tallinja, fordi vi kan trekke 5 barn fra 18, altså vi kjenner til hvor store «skritt» man skal bevege seg på tallinja. Det lar seg ikke å gjøre i tilfellet med delingsdivisjon, vi kan ikke trekke 5 bord fra 18 barn.

Oppgave 2 (8 %)

Henrik, Natalia og Monica er glad i tyggegummier og har en del liggende på hvert sitt kontor. I en tyggegummipakke er det fire tyggegummier. En eske tyggegummier utgjør fire pakker. Butikken selger dem også i større bokser med fire esker i hver.

Henrik har 1 eske og 3 løse tyggegummier. Natalia har 4 esker, 2 pakker og 1 løs tyggegummi. Monica har 2 esker, 3 pakker og 2 løse tyggegummier. De har noen spørsmål som de ønsker svar på. Husk å forklare hvordan du kommer fram til svarene.

a) **Henrik lurer på hvor mange tyggegummier hver av personene har på kontoret sitt når man skriver det i firetallsystemet. Hva svarer du han?**

Navn	Boks	Eske	Pakke	Løse	I firetallsystemet
Henrik		1	0	3	103_{fire}
Natalia	1	0	2	1	1021_{fire}
Monica		2	3	2	232_{fire}

b) Natalia lurer på hvor mange tyggegummier de har til sammen, ved å vise utregning i firetallsystemet. Hva svarer du henne?

	1	1	1		
		1	0	3	fire
+	1	0	2	1	fire
+		2	3	2	fire
=	2	0	2	2	fire

c) Monica lurer på hvor mange tyggegummier det er i sekstentallsystemet uten å måtte gjøre om til titallsystemet først. Hva svarer du henne?

Vi vet at $4^2 = 16$. I sekstentallsystemet har vi symboler fra 0 til E, dvs. at for hvert siffer i firetallsystemet har vi disse potensene: $4^1 – 4^0$

Ett siffer i sekstentallsystemet er to sifre i firetallsystemet.

2	0	2	2
2 av 4^1	0 av 4^0	2 av 4^1	2 av 4^0
8		A	

Oppgave 3

a) **Følgende oppgaven har til hensikt å avdekke eventuelle misoppfatning(-er) hos elevene:**

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{\square}$$

i) **Beskriv hvilke(-n) misoppfatning(-er) som kan avdekkes gjennom løsningen av denne oppgaven. Forklar hvordan elever med slik(-e) misoppfatning(-er), løser denne oppgaven.**
Noen elever tar utgangspunkt i kunnskap de har fra de naturlige tallene når de skal avgjøre størrelsen til brøker. De ser på teller og nevner som uavhengige tallstørrelser og tar ikke hensyn til forholdet mellom dem. Det medfører at elevene ser på differensen mellom teller og nevner når de skal vurdere størrelsen til brøken. Jo mindre differansen er, jo større er brøken. Dette medfør at eleven finner en nevner som har samme differens som mellom 4 og 5, altså skiver eleven 9 i boksen.

ii) **Du har en elev med et utgangspunkt som i i). Hvordan kan du som framtidig lærer helt konkret gå fram for å tilrettelegge for en diagnostisk undervisning?**
Når jeg har oppdaget at eleven har den misoppfatningen at brøkstørrelsen er avhengig av differensen mellom teller og nevner, så vil jeg tilrettelegge undervisningen slik at det oppstår en kognitiv konflikt, og eleven selv kan oppdage at hen har tenkt feil. Til eksempel så kan eleven få skravere $\frac{4}{5}$ og $\frac{8}{9}$ og se om det er likt. Deretter kan vi diskutere og jobbe med ulike brøker som er like for å kunne oppdage sammenhengen. Målet er at eleven selv kan se at det er forholdet mellom teller og nevner som avgjør størrelsen og ikke differensen. Etterpå så skal den nye kunnskapen befestes.

b) **Regn ut og forklar hvordan man kan bruke minste felles multiplum og største felles faktor i denne subtraksjonsoppgaven:**

$$\mathbf{\frac{10}{16} - \frac{9}{20} =}$$

Minste felles nevner kan finnes ved å finne mfm(16,20)=80. Dette gir:

$$\mathbf{\frac{10}{16} - \frac{9}{20} = \frac{50}{80} - \frac{36}{80} = \frac{14}{80}}$$

For å forkorte brøken så mye som mulig så brukes sff(14,80)=2

$$\mathbf{\frac{14}{80} = \frac{7}{40}}$$

c) Finn en brøk som befinner seg akkurat midt mellom følgende to brøker: $\mathbf{\frac{2}{5}}$ og $\mathbf{\frac{1}{3}}$.

$\frac{2}{5} = \frac{6}{15} = \frac{12}{30}$ og $\frac{1}{3} = \frac{5}{15} = \frac{10}{30}$ midt mellom finnes brøken $\frac{11}{30}$

d) Vis overgangen mellom brøk og desimaltall:

i) $\mathbf{\frac{7}{18}} =$ $\quad 7:18 = 0{,}388\ldots = 0{,}3\overline{8}$

$$\begin{array}{l} 70 \\ \underline{-54} \\ 160 \\ \underline{-144} \\ 160 \\ \underline{-144} \\ 16 \\ \ldots \end{array}$$

ii) **12,56** $= 12\,\frac{56}{100} = 12\,\frac{28}{50} = 12\,\frac{14}{25}$

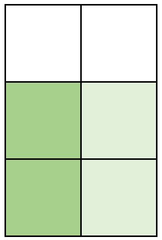
iii) $\mathbf{0{,}3\overline{6} = 0{,}3666}\ldots =$

La oss kalle dette tallet x, dvs $x = 0{,}366666\ldots$. Da får man følgende likning som løses mht. x:

$$\begin{array}{c} 10x = 3{,}66666\ldots \\ \underline{100x = 36{,}66666\ldots} \\ 100x - 10x = 33 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} 90x = 33 \\ x = \dfrac{33}{90} = \dfrac{11}{30} \end{array}$$

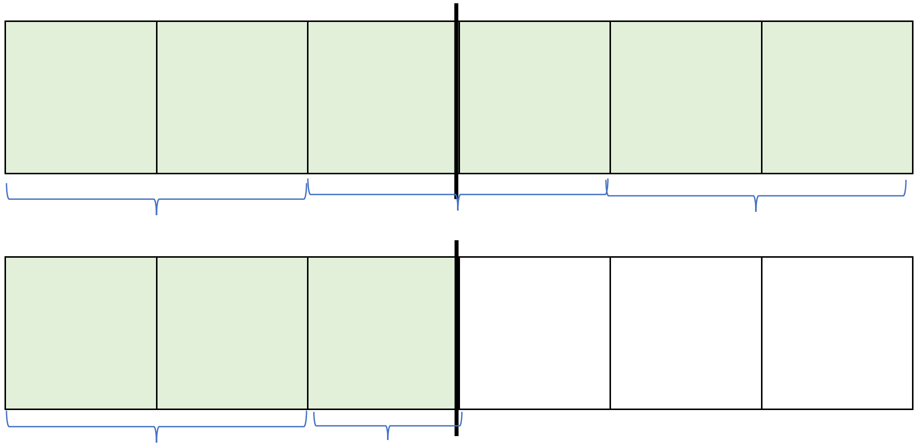
e) Lag en forklarende illustrasjon og et praktisk eksempel som viser regneoperasjon og løsning på denne oppgaven:

i) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$



Vi har igjen to tredeler av en sjokoladekake. Henrik spiser halvparten av den som er igjen. Hvor stor del av hele kaken har han spist?

ii) $\frac{3}{2} : \frac{1}{3}$



Vi bruker målingsdivisjon og ser at det får plass til 4 hele og 1 halv tredel. Svaret er derfor $4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$.

Du har 1,5 liter ($\frac{3}{2}$ liter) vann og skal fylle det i flasker som rommer ca. 0,33 liter ($\frac{1}{3}$ liter). Hvor mange flasker trenger du?

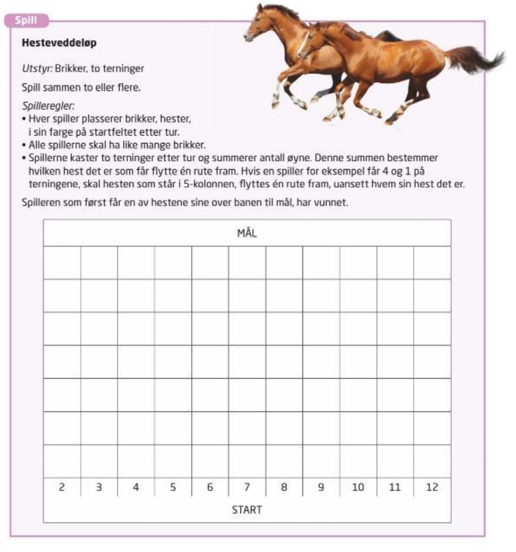
(Man kan jo komme inn på om man trenger 4,5 flasker eller fem flasker, men begge resonnementene gir poeng.)

f) **Andrea finner en fin kjole som er på salg nå og koster 420 kr. Den tidligere prisen var 600 kr. Andrea prøver å regne ut i hodet hvor mange prosent prisavslaget er på. Hvordan kan Andrea bruke hoderegningsstrategier for å finne svaret?**

Oppgaven kan løses ved å tenke oppgavestrenger, f.eks. «veien om 1%». 1% av den gamle prisen er $\frac{600}{100} = 6\ kr$, og da blir 10% tilsvarende 60 kr, og prisdifferansen 600 – 420 = 180 kr inneholder 3 ganger med 60 kr, som igjen tilsvarer 3 ganger med 10%, altså 30%.

Alternativt, kan Andrea finne prisdifferansen først, og så bruke hoderegning og sine ferdigheter i brøkregning for å finne hvor stor prosentandelen blir av den gamle prisen 600 kr. Prisdifferansen er 180 kr, og Andrea må finne hvor stor andel er 180 kr av 600 kr. Hvis hun tenker brøk, da kan den forkortes på følgende måte, noe som kan gjøres «i hodet»: $\frac{180}{600} = \frac{18}{60} = \frac{3}{10} = 0{,}3 = 30\%$.

Oppgave 4 (16 %)



Spill

Hesteveddeløp

Utstyr: Brikker, to terninger

Spill sammen to eller flere.

Spilleregler:
- Hver spiller plasserer brikker, hester, i sin farge på startfeltet etter tur.
- Alle spillerne skal ha like mange brikker.
- Spillerne kaster to terninger etter tur og summerer antall øyne. Denne summen bestemmer hvilken hest det er som får flytte én rute fram. Hvis en spiller for eksempel får 4 og 1 på terningene, skal hesten som står i 5-kolonnen, flyttes én rute fram, uansett hvem sin hest det er.

Spilleren som først får en av hestene sine over banen til mål, har vunnet.

MÅL

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

START

Nedenfor finner du spillet «Hesteveddeløpet» som er hentet fra læreboka «Multi 6a».

Ta utgangspunktet i spillet «Hesteveddeløpet».

a) **Hva er utfallsrommet ved kast av to terninger?**

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

b) Hva er sannsynligheten for at summen er 8 antall øyne ved et tilfeldig kast? Skriv svaret som brøk.

Det er 5 gunstige utfall (markert med gult) av 36 mulige utfall. Sannsynligheten for at summen av antall øyne på begge terningene blir lik 8 er dermed $\frac{5}{36}$.

c) En elev noterte alle terningkastene (kast med to terninger) i løpet av timen (se tabellen).

3	5	6	2	9	9	4	6	7	9
7	9	11	12	7	5	8	6	7	9
9	6	10	7	7	5	11	10	2	4
7	6	8	5	6	8	5	9	8	10
8	4	7	8	8	3	6	8	7	7

i) Lag frekvenstabell over terningkastene.

Utfall	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Frekvens	2	2	3	5	7	10	8	7	3	2	1

ii) Finn gjennomsnittet av terningkastene.

$$\mu = \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 10 + 8 \cdot 8 + 9 \cdot 7 + 10 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 12 \cdot 1}{50} = \frac{4 + 6 + 12 + 25 + 42 + 70 + 64 + 63 + 30 + 22 + 12}{50}$$

$$= \frac{350}{50} = 7$$

iii) Finn standardavviket av terningkastene. Rund av til nærmeste hele tall.

For å finne standardavvik kan man utvide tabellen:

- 3. rad: Differansen mellom gjennomsnittet og hvert av utfallene
- 4. rad: Verdiene fra 3. rad opphøyes i andre (kvadratet av differensene)
- 5. rad: Multiplikasjon av verdiene fra 4. rad med tilsvarende frekvens (fra rad 2).

Man finner variansen ved å summere alle verdier i 5. rad og dele på antall observasjoner, dvs. 50 (som for hele populasjonen, hvis noen skal dele på 49 som for stikkprøveutvalg, skal det gis like mye poeng). Standardavvik regnes ved å trekke kvadratrot av variansen.

Utfall	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Frekvens	2	2	3	5	7	10	8	7	3	2	1
differanse	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5
opphøyd	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25
*frekvens	50	32	27	20	7	0	8	28	27	32	25

$$Var = \frac{50 + 32 + 27 + 20 + 7 + 0 + 8 + 28 + 27 + 32 + 25}{50} = \frac{256}{50} = 5{,}12$$

$\sigma = \sqrt{Var} = \sqrt{5{,}12} \approx 2{,}26 \approx 2$ (avrunding til nærmeste hele tall)

iv) Hva betyr svarene du fikk i ii) og iii) i sammenheng med den lille undersøkelsen til denne eleven?

Hvis vi ser på intervallet $[\mu \pm \sigma] = [7 \pm 2] = [5, 9]$, ser vi at majoritet av observasjonene skal konsentrere seg rundt gjennomsnittet med avstand gitt av standardavviket, dvs de fleste tilfeller treffer utfallene med å få 5, 6, 7, 8 og 9 antall øyne på begge terningene. Vi summerer frekvens og ser at det blir 5 + 7 + 10 + 8 + 7 = 37 observasjoner av totalt 50.

d) Hvordan kan du som framtidig lærer tilrettelegge for forståelse av De store talls lov gjennom bruk av spillet «Hesteveddeløpet»?

Poenget er at læreren må samle flest mulig observasjoner av tilfeldige forsøk – i dette tilfellet er det terningkast med egne spilleregler. Et forslag er at læreren deler klassen i par, gjennomfører spillet og notere **alle** resultater av terningkast som man gjorde i oppgaven c). Hvis klassen ikke er så stor, bør læreren ta vare på resultatene fra tidligere år, som kan brukes inn i analysen. Ved å regne relativ frekvens for alle utfallene ut fra de faktiske forsøkene, vil man i det lange løp se at det nærmer seg den teoretiske sannsynligheten – se oppgavene a), b).

e) Du har planlagt å gi liknende spill som «Hesteveddeløpet» til eldre elever, men endrer oppgaveteksten slik at den blir mer avansert. I denne avanserte versjonen kaster spillerne to terninger og regner deretter kvadrat av differensen mellom antall øyne på hver terning. Hvilke verdier (hester) har disse elevene i startfeltet på dette spillet?

Her kan man selvfølgelig tegne utfallsrommet som gjorde i oppgaven a), men det er ikke nødvendig. Poenget er at man skal vise hvilke utfall som er mulige og kan resonnere seg fram til at den minste differensen er 0 hvis begge terningene viser samme antall øyne. Den størst mulig differensen kan være 5, hvis man får 1 og 6 på terningene. De mulige differensene man kan ha ved kast av to terninger er {0, 1, 2, 3, 4, 5}, og tilsvarende kvadratverdiene blir da {0, 1, 4, 9, 16, 25} som altså er verdiene eller «hestene» man skal ha i startfeltet for dette spillet.

Oppgave 5 (20 %)

a) Lise har 3578 kr. Hun får en ekstra pengesum som er større enn 100 kr slik at hun og de to vennene hennes kan dele totalbeløpet helt likt mellom seg uten rest. Vis gjennom bruk av delelighetsregler hva den ekstra pengesummen kan være.

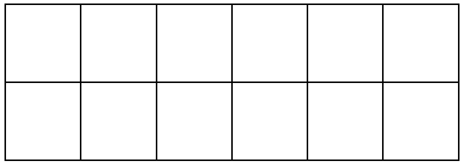
Tverrsummen skal være delelig på 3 for at hele summen skal være delelig på 3. Hvis hun får 103 kr så har hun totalt 3681 kr. 3+6+8+1=18, 3 deler 18, altså kan den ekstra pengesummen være 103 kr.

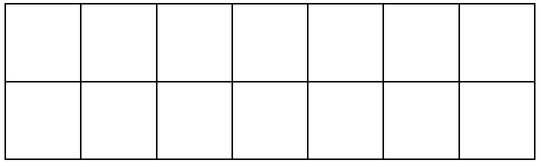
b) Ta utgangspunkt i kjerneelementet *Resonnering og argumentasjon*. Forklar hvorfor dette kjerneelementet kan kobles til arbeid med en delelighetsregel du selv velger.

Resonnering i matematikk handler om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker. Det innebærer at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser.

Hvis du for eksempel jobber med delelighetsregelen for 2, kan elevene selv komme fram til at alle tall som slutter på 0, 2, 4, 6, 8, kan deles med to.

Dette kan de gjøre gjennom bruk av konkreter eller tegning og se at alle partall kan visualiseres, eksempelvis som disse rektanglene:





c) Forklar hvorfor summen av de tre tallene 22, 23 og 24 er delelig med tre på følgende måter:

i) med symboler og ord

22 gir resten 1 når tallet deles med 3, 23 gir resten 2 når tallet deles med 3 og 24 gir ingen rest når tallet deles med 3. En del av hver av de tre påfølgende tallene må være delelig med tre, og summen av restene må være delelig med 3. Da må også summen av de 3 påfølgende tallene være delelig med 3.

22=21+1; 23=21+2; 24=21+3=24

(21+1)+(21+2)+(24) = 21+21+24+1+2+0 = 21+21+24+3 = 3(7+7+8+1), altså er summen delelig med 3.

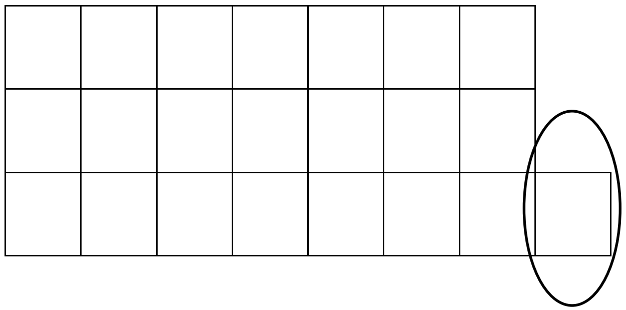
Det kan også hende at noen velger å generalisere, men å vise med tall gir allikevel full uttelling.

Hvis vi kaller det første tallet t, blir det neste tallet i tallrekka t + 1, og det tredje tallet blir t + 2, siden det er tre påfølgende tall.

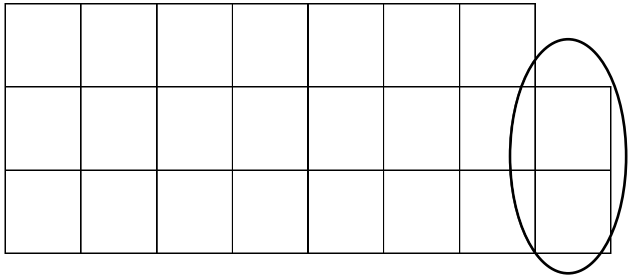
Da blir summen av disse tre tallene t + (t + 1) + (t + 2) = 3t + 3. Denne summen vil alltid være delelig med 3, det vil bli t + 1, altså det midterste tallet i tallrekka.

ii) gjennom visualisering (tegning)

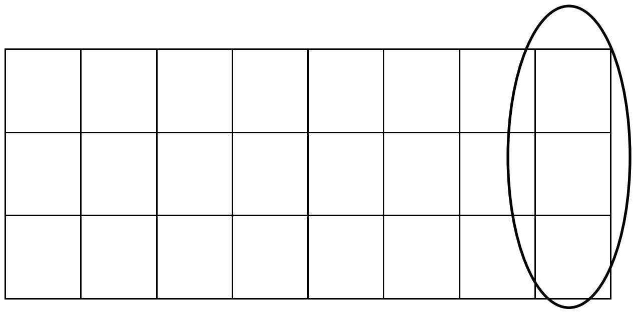
22



23



24



Vi kan se at summen av de tre påfølgende tallene er delelig på 3 fordi summen av restene også er delelig på 3.

d) Petra og Kurt diskuterer hvordan man kan finne ut om et tall er primtall eller sammensatt:

Petra: ***For å finne ut om et tall er primtall må vi ta kvadratroten av det.***

Kurt: ***Det er jeg uenig i. Man må teste alle tallene med primtall fra 2.***

i) Hvordan kan du utfylle resonnementene til Petra og Kurt for å finne ut om et tall er primtall? Hvorfor kan man gjøre det på denne måten?

Kurt er nærmest det riktige svaret, men han bør legge til at det må testes for alle tallene med primtallene *opp til kvadratroten av tallet*.

For eksempel: Hvis du skal teste om 49 er et primtall eller sammensatt tall, holder det med å test alle primtall opp til $\sqrt[2]{49} = 7$. Enten er det sammensatte tallet sammensatt av to like store heltall eller av et mindre og et større.

ii) Avgjør om 1217 er primtall eller sammensatt tall.

Sjekker først om tallet er delelig med 2, 3, 5, 10 med delelighetsregler. Går ikke!

$\sqrt{1217} \approx 34{,}9$

2: Har sjekket

3: Har sjekket

5: Har sjekket

7: Ikke en faktor i 1217

11: Ikke en faktor i 1217

13: Ikke en faktor i 1217

17: Ikke en faktor i 1217

19: Ikke en faktor i 1217

23: Ikke en faktor i 1217

29: Ikke en faktor i 1217

31: Ikke en faktor i 1217

1217 er et primtall!

e) Hvordan kan en matematikklærer avgjøre om en elev er i matematikkvansker? Skriv maksimalt en side.

Åpent spørsmål, men besvarelsene bør inkludere disse momentene:

- Kjennetegn på matematikkvansker: Elever har vansker med telling, antallsforståelse, sammenligning av to tall, plassverdi, aritmetikk og/eller estimering (Lunde s. 22).
- Kartlegging: Statisk og/eller dynamisk

Andre svar kan også gi poeng, til eksempel hvis besvarelsen inneholder andre årsaker så som psykologiske, medisinske og/eller didaktiske.

f) Berikelse er en måte å tilpasse opplæringen på.

i) Forklar hva berikelse er.

Berikelse er en type differensiert og tilpasset undervisning i heterogene klasser der elevene kan arbeide på ulike nivåer, men med samme problemløsende/utforskende oppgave.

ii) En annen lærer vil heller ha nivådifferensiering i sin klasse. Hvordan kan du argumentere for berikelse framfor nivådifferensiering overfor denne læreren?

Eksempler på argumenter:

- Alle elevene arbeider og utforsker samme oppgave, noe som gir gode muligheter for diskusjon og samarbeid. Elevene kan hjelpe hverandre.
- Flere av kjerneelementene i læreplanen peker i retning av en undervisning med berikelse.
- Nivådeling gir få positive effekter for elevene. For lavtpresterende gir det faktisk negativ effekt.

Full uttelling selv om man ikke har med alle. Her kan studentene også ha egne argumenter.

Oppgave 6 (20 %)

a) Hvor mange «ord» kan vi lage med bokstavene i CORONAVIRUS? Vi tar ikke hensyn til betydning av «ordene».

Ordet CORONAVIRUS består av 11 bokstaver, og disse bokstavene kan stokkes om på 11! måter. Men siden det finnes 2 par av identiske bokstaver, så må man dele 11! på 2! to ganger fordi bokstavene O og O kan stokkes om på 2! måter, og det samme gjelder bokstavene R og R.

$$\frac{11!}{2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{2 \cdot 2} = 9\,979\,200$$

Det er 9 979 200 mulige måter å stokke bokstavene på, dvs. man kan lage så mange ulike «ord».

b) På et sykehus er det seks personer som skal testes.

i) På hvor mange måter kan disse seks personene stille seg i kø?

På første plass kan en av de 6 personene stå, på andreplass er det allerede 5 mulige som kan stå der for hver av de 6, osv. Til sammen blir det $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$ rekkefølger

ii) Den første og den siste av de seks personene er forhåndsbestemt. Hvor mange rekkefølger kan vi da få?

Siden den første og den siste er bestemt, så er det 4 personer igjen å velge mellom som kan stå på plass nr. 2, og det blir 3 igjen som kan stå på plass nr. 3, og så 2 igjen som kan være på plass nr. 4, og den fjerde personen kan da stå på plass nr. 5.
Til sammen blir det $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ mulige rekkefølger.

iii) Ta utgangspunkt i to ulike problemløsingsstrategier som kan benyttes for å finne svar på i) eller ii). Forklar først de to strategiene. Vis deretter konkret hvordan du bruker disse to problemløsingsstrategiene på i) eller ii).

Problemløsingsstrategier kan eksempelvis være:

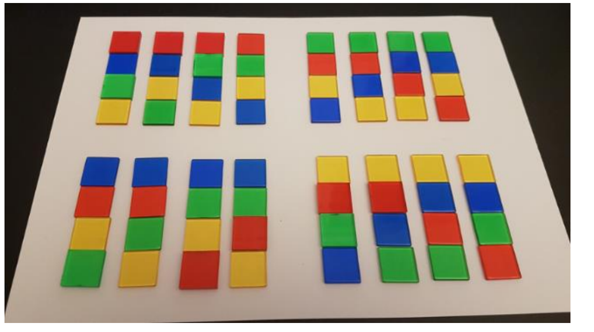
- Lage en visualisering: Visualiseringen kan ta form av en tegning eller et diagram. Det kan også gjøres ved hjelp av konkreter.
- Prøve og feile: Man kan prøve og se hvordan det går. Om forsøket «mislykkes» prøver man på nytt. Men forsøkene bør ikke være tilfeldige. En systematisk utprøving av muligheter vil lede fram til en eller flere løsninger på problemet.
- Lage en systematisk tabell: En oversikt over de muligheten oppgaven legger opp til og som kan føre til en løsning på problemet.
- Se etter mønster: En systematisk oversikt kan lede til at man oppdager et mønster som gir oppklaringer og mulighet for løsning.
- Arbeide baklengs: Mange problem er slik at man kan arbeider seg fram gjennom informasjonen som gis fra begynnelse til slutt i oppgaven. I noen problem vil utgangspunktet være ukjent. Da må man skifte fokus, starte med informasjonen som er kjent, og den står kanskje i slutten av teksten.
- Forenkle problemet: Noen problem kan være så omfattende at det ser uoverkommelig ut å starte på det. Da kan strategien forenkle problemet være til hjelp. Man løser en enklere utgave av samme problem og ser om det er et mønster som kan hjelpe oss videre.

Eksempler på løsning av i):

- Forenkle problemet:
  - Løse problemet med færre personer for å løse en enklere utgave og se om man oppdager et mønster
  - Med 2 personer kan begge personene stå som nummer 1 i køen. For hver av disse 2 kan 1 stå som nummer 2. Dette gir 2 muligheter.
  - Med 3 personer kan alle tre personene stå som nummer 1 i køen. For hver av disse 3 kan 2 stå som nummer 2 og 1 som nummer 3. Dette gir $3 \cdot 2 \cdot 1$ muligheter

- Med 4 personer kan alle fire personene stå som nummer 1 i køen. For hver av disse 4 kan 3 står som nummer 2. For hver av disse 4 · 3 mulighetene kan 2 stå som nummer 3. dette gir 4 · 3 · 2 · 1 muligheter.
- Det betyr at for seks personer, vil det bli $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ rekkefølger

- Se etter mønster og visualisere:
  - Det blir for mange tilfeller å vise med alle 720 rekkefølgene, men det kan gjøres med færre personer.
  - Her vises det for fire personer for 16 av de totalt 24 tilfellene, der hver person har fått sin farge som representasjon. Visualiseringen får fram hvordan man systematisk legger opp mulighetene for en person som nummer 1 i køen, men i visualiseringen mangler det 2 tilfeller for hvert av disse tilfellene



  - Da er veien kort å se mønsteret til 5 og 6 personer.

Den femte personen kan stå på 5 ulike plasser i hver av disse 24 tilfellene: 5 · 24 = 125 rekkefølger.

Den sjette personen kan stå på 6 ulike plasser i hver av disse 125 rekkefølgene: 6 · 125 = 720 rekkefølger

For løsningen av ii) blir det tilsvarende som for i), men enda mer relevant sett ut ifra en kø på 6 personer der to av plassene er bestemt.

c) Det skal testes en ny medisin på et sykehus. Det ligger 20 pasienter ved en av avdelingene.

i) Hvor mange uordnede utvalg blir det når 4 pasienter skal velges ut blant de innlagte ved denne avdelingen?

I situasjoner med uordnede utvalg uten tilbakelegging bruker man kombinasjons-formelen

$$C(20,4) = \binom{20}{4} = \frac{20!}{16! \cdot 4!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 17}{1} = 4845$$

Det er 4845 måter å velge 4 personer av 20 innlagte.

ii) Hvordan kan oppgaveteksten formuleres til å gjelde et *ordnet* utvalg med like mange pasienter?

I oppgave i) var det ikke rekkefølgen viktig, for man skulle bare tilfeldig velge 4 personer av 20, uten å rangere dem på noen vis. Hvis vi ønsker å lage en oppgave der rekkefølgen er viktig, så må vi lage en betingelse som gjør at de 4 utvalgte pasienter også skal rangeres eller inneha roller, f.eks. ved å bruke 4 ulike medisiner: Type A, B, C og D. Da blir det 20 mulige pasienter å velge mellom som skal teste A, 19 igjen som kan teste B, osv. Og løsningen blir da $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 116280$ muligheter (permutasjons-formelen).

d) Folkehelseinstituttet (FHI) har anslått at 75 % av det antallet som testet positivt i Norge, var friskmeldte etter en gitt periode. Vi velger å observere tre av dem.

i) **Hva er sannsynligheten for at alle blir friske?**

$$p(\text{alle 3 er friske}) = 0{,}75^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

ii) Hva er sannsynligheten for at ingen blir frisk?

$$p(\text{alle 3 er syke}) = 0{,}25^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

iii) Hva er sannsynligheten for at minst én blir frisk?

Sannsynligheten for at minst en av de 3 pasientene er frisk er *komplementær* med sannsynligheten for at ingen av dem er frisk, dvs.

$$p(\text{minst 1 er frisk}) = 1 - p(\text{alle 3 er syke}) = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$