Lösning o sensorveiledning

Emnekode: LMUMAT10417-1 og LMAT10415-1 **V20**	**Emnenavn:** Geometri, måling, statistikk og sannsynlighetsregning 2 (5-10)
Dato: Torsdag 14.mai	**Eksamenstid: 09:00 -15:15**
(IDH): Individuell Digital Hjemmeeksamen Alle hjelpemidler (**Uten kontakt med andre personer**)	**Faglærere:** Russell Hatami (emne ansvarlig) Natalia Bredrup
Om eksamensoppgaven og poengberegning: Oppgavesettet består av 5 sider inklusiv denne forsiden og formelark. Kontroller at oppgavene er komplett før du begynner å besvare spørsmålene. Alle oppgavene skal besvares og er vektet som angitt i oppgavene.	
Sensurfrist: Karakterene er tilgjengelige for studenter på Studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. www.hiof.no/studentweb	

Lykke til,

ønsker Natalia og Russell

Formelark – på eksamen 104 og V4

	Med tilbake legging	Uten tilbake legging
Ordnede utvalg	n^k	$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$
Uordnede utvalg		$nCk = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Hypergeometrisk modell:

$$P(x) = \frac{\binom{a}{x} \cdot \binom{b}{y}}{\binom{N}{n}} \quad \text{der} \quad N = (a+b) \quad \text{og} \quad n = (x+y)$$

Binomisk fordeling:

$$P(x, y) = \binom{n}{x} k^x \cdot (1-k)^y, \qquad \text{der } n = (x+y)$$

$$ax^2 + bx + c = x^2 + px + q = 0; \ \text{der} \ \frac{b}{a} = p = -(x_1 + x_2) \ \text{og} \ \frac{c}{a} = q = x_1 x_2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

1. 9% På en skole er det 250 elever. Det skal velges tre personer til elevrådet. Hver klasse har presentert sine kandidater. Det totale antallet kandidater er 45 elever, hvorav 15 er jenter. Vi går uti fra at det velges tilfeldig.

a. Hvilken av de to metodene: trediagram eller formler for sannsynlighetsmodellen, er det mest passende her? 1% Begrunn valg av metode. 2%

Förklaring 1: I grundskolan går det utmärkt att använda sig av träddiagrm.

Förklaring 2: Däremot om vi kan formel för sannolikhetsfördelning, är det ok. att kalkylera.

Jag tror att de flesta studenter väljer här träddiagrammet som är mycket enklarar.

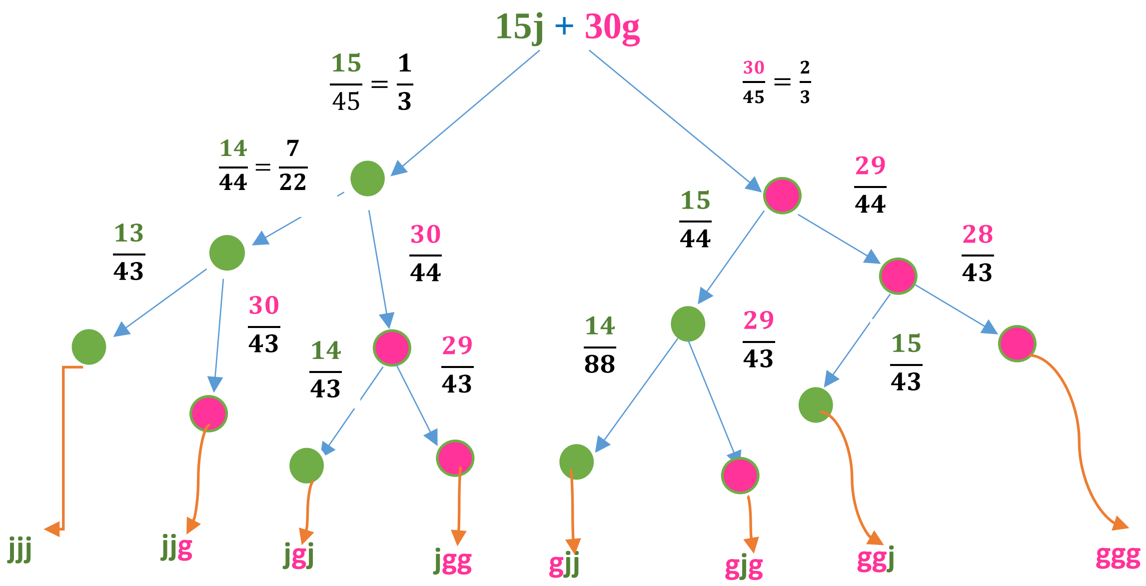
b. Er sannsynlighetsmodellen her binomisk eller hypergeometrisk? Begrunn svaret ditt. 2%

Korrekte svar är Hypergeometrisk 1%.

Förklaring: Eftersom sannolikheten för samma händelse ändras.1%

OBS!

För *c* och *d* delen får studenten använda siga av träddiagram eller hypergeometriskformel eller kubregel (med lite modifikation). Här nedan presenteras alla de tre metoderna. Alltså vilken metod som helst av dessa är helt acceptabel.



c. Hva er prosentvis sannsynlighet for at elevrådet består av tre jenter? 2%

$$P(3j) = P(jjj) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{22} \cdot \frac{13}{43} = \cdots \approx 3{,}2\%\ eller\ 3\%$$

d. Hva er prosentvis sannsynligheten for at minst 2 gutter blir valgt inn i elevrådet? 2%

Alternativ 1: träddiagram:

$$P(minst\ 2g) = P(2g, 1j) + P(3g)$$

$$= 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{29}{44} \cdot \frac{15}{43} + \frac{2}{3} \cdot \frac{29}{44} \cdot \frac{28}{43} += \cdots \approx 74{,}6\%$$

Alternativ 2: Hypergeometrisk formel

$$P(minst\ 2g) = P(2g, 1j) + P(3g)$$

$$= \frac{\binom{30}{2} \cdot \binom{15}{1}}{\binom{45}{3}} + \frac{\binom{30}{3} \cdot \binom{15}{0}}{\binom{45}{3}} = \frac{\frac{30!}{3!\,27!} \cdot 1}{\frac{45!}{3!\,42!}} + \frac{\frac{30!}{2!\,28!} \cdot \frac{15!}{1!\,14!}}{\frac{45!}{3!\,42!}} = \cdots \approx 74{,}6\%.$$

---

2. **15%** Et selskap på 29 personer har bestilt 171 spanske småretter, kalt tapas, til lunsj. En voksen porsjon består av 9 tapas og en barneporsjon består av 4 tapas. Hvor mange barn var i selskapet? Løs ved å bruke 5 forskjellige metoder som kan være passende for forskjellige trinn på skolen (5-10).

Om studenter ritar enkla bilder och löser problemet är acceptabel som en metod.

Metod 1: Ordresonnement. Varje lunch består av minst 4 småretter. Alltå totalt blir det totalt antal småretter

$$4 \cdot 29 = 116$$

Men de har beställt 171 småretter. Alltsåskillnaden (55) måste tillhöra vuxen talrik.

$$171 - 116 = 55$$

Vuxentalrik behöver 5 småretter till. Härmed antalet vuxna är lika med $\frac{55}{5} = 11$.

Antal barn som var i sälskpet var $29 - 11 = 18$.

Metod 2: Tabell.

I tabell försöker vi sturukturera våra gissningar, som följande:

Antal vuxna	Antal barn	Antal totala småretter
14	$(29-14)$ =15	$14 \cdot 9 + 15 \cdot 4$ = 186 Nej!
10	$(29-10)$ =19	$10 \cdot 9 + 19 \cdot 4$ = 166 Nej!
11	$(29-11)$ =18	$11 \cdot 9 + 18 \cdot 4$ = 171 YES!

Metod 3: Likning.

$$x \ = \ antal\ vuxna$$
$$(29 - \ x) = \ antal\ barn^{1}$$
$$Antal\ småretter \ = \ x \cdot 9 + (29 - \ x) \ \cdot \ 4 \ = \ 171$$
$$9x + 116 - 4x = \ 171$$
$$5x \ = \ 171 - 116$$
$$5x \ \ = \ 55$$
$$x \ = \ 11.$$

<u>Svar: antal barn var 18.</u>

Metod 4: Likningssett.

Vi väljer

$$antal\ vuxna \ = x$$

$$antal\ barn = y$$

Alltså har vi

$$\begin{cases} x + y = 29 \\ 9x + 4y = 171 \end{cases} \ \leftrightarrow \ \begin{cases} x + y = 29 \\ 4(x + y) + 5x = 171 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 26 \\ 4 \cdot 29 + 5x = 171 \end{cases}$$

$$116 + 5x = 171 \ \leftrightarrow \ 5x = 171 - 116$$
$$5x = 55.$$
$$x = 11 \text{ och } y = 29 - 11 = 18$$

<u>Svar: antal barn var 18.</u>

Metod 5: Grafisk.

$$\begin{cases} x + y = 29 \\ 9x + 4y = 171 \end{cases}$$

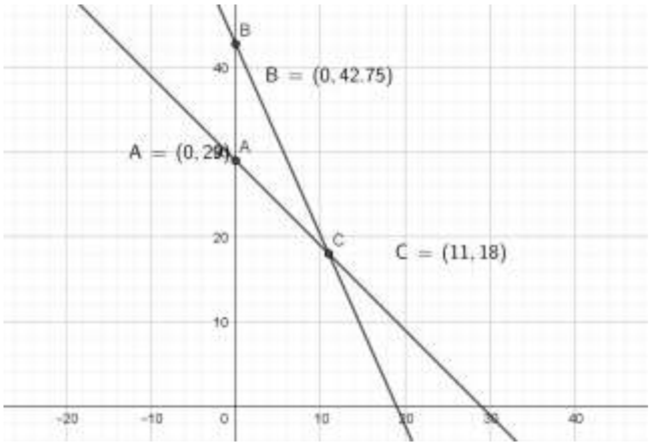
$$\begin{cases} y = -x + 29 \\ 4y = -9x + 171 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x + 29 \\ y = -2{,}25x + 42{,}75 \end{cases}$$

Här räcker det med ett enkel skiss där markeras skärningspunktens koordinater

(om studenten använder sig av geoGebra är det fantastiskt också. Men det krävs inte).

[1] I tabellen lärde vi oss den viktiga sturukturdelen antal barn = (29 – antal vuxna). Denna skrivsätt är brobyggare från aritmetik till algebra (se tabellen). Nu om vi väljer x som antllet vuxna så klart är antalet barn lika med $(29 - x)$.



<u>Svar: antal barn var 18.</u>

---

3. 8% Vide bestemte seg for å lage juice. Han tar ***1*** del konsentrert juice og ***9*** deler vann. Han smaker den ferdige drikken og synes den ikke smaker godt i det hele tatt. Han leser på flasken at konsentrert juice skal blandes med vann i forholdet 2:5.

Skriv en funksjon der forholdet mellom ferdig blandet juice og konsentrert juice uttrykk på symbolsk. Du bør gjøre dette ved å bruke to forskjellige passende metoder. Minst en av dem må være egnet for grunnskolen.

Metod 1: *Vein om en* – lämlig för grundskolan

Koncenterad	vatten	färdig blandad
2	5	$2+5=7$
$\frac{2}{2}=\mathbf{1}$	$\frac{5}{2}$	$\mathbf{1}+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$
$x\cdot 1=\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5x}{2}$	$x+\frac{5x}{2}=\frac{7}{2}\boldsymbol{x}$

Svar: $f(x)=\frac{7x}{2}$

Metod 2: ***algebraisk***

Vi väljer $\boldsymbol{x} = koncenteead\ saft$ och $\boldsymbol{y} = vatten\boldsymbol{.}$ Så har vi $färdigblandad\ saft = x + y$.

$$\frac{antal\ delar\ Vatten}{antal\ delar\ koncenterad\ saft} = \frac{y}{x}.$$

Dvs.

$$\frac{y}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2y = 5x \Leftrightarrow y = \frac{5x}{2}.$$

Alltså får vi

$$färdigblandad\ saft = x + y = x + \frac{5x}{2} = \frac{7x}{2}.$$

Dvs. vi har hittat en relation mellan andelar koncenterad saft och den färdigblandade saften.Alltså har vi

$$f(x) = \frac{7x}{2}.$$

---

4. 15% I fjor arrangerte Tilia en 10-års gjenforeningsfest for klassekameratene. Ved oppmøte håndhilste alle, inkludert Tilia, en gang med hverandre. Totalt var det 78 håndtrykk. Hvor mange av Tilias klassekamerater deltok på festen? **Løs oppgaven ved å bruke tre forskjellige metoder.**

Tre av följande metoder. **Varje lösningsmetod ger 5%.**

$$Antal\ gäster + Tilia = n$$
$$Antal\ handskakningar\ = 78$$

Metod 1. Resonemang och tallära. Varje person skakar hand med $(n-1)$ personer

Alltså $n(n-1)$ blir summan av handskakningar. Men eftersom det blir dubletter så delar vi produkten med 2; så får vi $\frac{n(n-1)}{2}$, som ska vara lika med 78. Alltså bör vi lösa följande likning för att komma till svaret:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 78$$

Eller

$$n(n-1) = 156.$$

$156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$. Det är två naturliga påvarandra följande tal. Om n er ett partall så är $(n+1)$ udda tall och viseversa. Antingen 3, 13 och 39 är tre udda tal som möjliga. Men 3 och 39 kan inte vara svaret. Eftersom det andra talet blir då 52 eller 4 som inte stämmer som efterföljande tal till 3 eller 39. Alltså de två talen måste vara 12 och 13.

Svar: Tilia hade 12 gäster

Metod 2. Resonemang och andragradslikning:

Första delen är identisk med metod 1. Istället för tallära används andragradslikning

$$n^2 + n - 156 = 0\,.$$

Lösningen till andragradsekvtion, kan vara med hjälp av faktorisering, en formel för andragradslikning, kvadratkomplettering eller grafisk. Vilken som är acceptabel.

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,, när\ x^2 + px + q = 0.$$

$$n = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 156} \;= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{625}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{25}{2},$$

Likningens svar är 13 eller -12.

Svar: Tilia hade 12 gäster

Metod 3. Kombinatorik. Om vi väljer antalet gäster plus sara är lika med *n*, så är antalet gäster är ett mindre.

Eftersom ordningen har ingen betydelse (när A skakar hand med B är detsamma som när B skakar hand med A), så liknar detta som *n* element kombinaras parvis utan att ordningen ha någon betydelse. Dvs.å

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = 78$$

$$n^2 - n = 156.$$

eller

$$n^2 - n - 156 = 0.$$

Vi har redan löst ekvationen.

Svar: Tilia hade 12 gäster

5. **8%** I kassen til Iris er det 12 svarte, 10 rosa og 9 blå hårstrikker. Iris plukker opp hårstrikker uten å se. Hvor mange hårstrikker må hun ta for å være sikker på å få minst

a. to hårstrikker i samme farge? **3%**
b. fem hårstrikker i samme farge? **5%**

S = **S**vart, **R** = **R**osa, **B** = **B**lå

Vi kan rita träddiagram. Men det blir lite för mycket. Vi kan också kombinera vår resonemang och träddiagram. Men vi använder oss enbart av resonemang.

a. Eftersom det är 3 olika färger är det i värsta otur fall möjligt att få en ny färg vid varje ny dragning av hårstrikker. Dvs. en kombination som liknar SRB. Men för **den fjärde** gången kan hon bli 100% säker att hon kan få ta i 2 hårstrikker av samma färg, oavsedd vilken av dessa tre hon tar.

För 3 i samma färg:

I värsta otur fall vid fjärde gången har vi t.ex. RRSB eller liknande. Vid två dragning till kan vi få i värsta otur fall kombination liksom RRSSBB. Slutligen **vid den sjunde** dragning har hon minst tre av samma färg oavsedd vilket som kommer upp.

Det kan hända att studenten direkt kommer på den generella principen genom att upptäcka mönstret. Om ingen kommer på denna upptäckt så lär de när de ser denna lösning.

För en hårstrikker av en färg räcker enbart 1 dragning

För 2 hårstrikker av samma färg räcker $1 + 3$ dragning

För 3 hårstrikker av samma färg räcker med $1 + \ 3 + 3 = 1 + 2 \cdot 3$

För 4 hårstrikker av samma färg räcker med $1 + 3 \cdot 3 = 1 + (4 - 1) \cdot 3$

För n hårstrikker av samma färg räcker med $1 + (n - 1) \cdot 3 = (3n - 2)$ dragning.

I detta problem gäller $1 \leq n \leq 9$. Eftersom vi har bara 9 hårstrikker, på grund av lägsta antalet har blåa som är 9.

Nu svarar vi på frågorna med den generella formel:

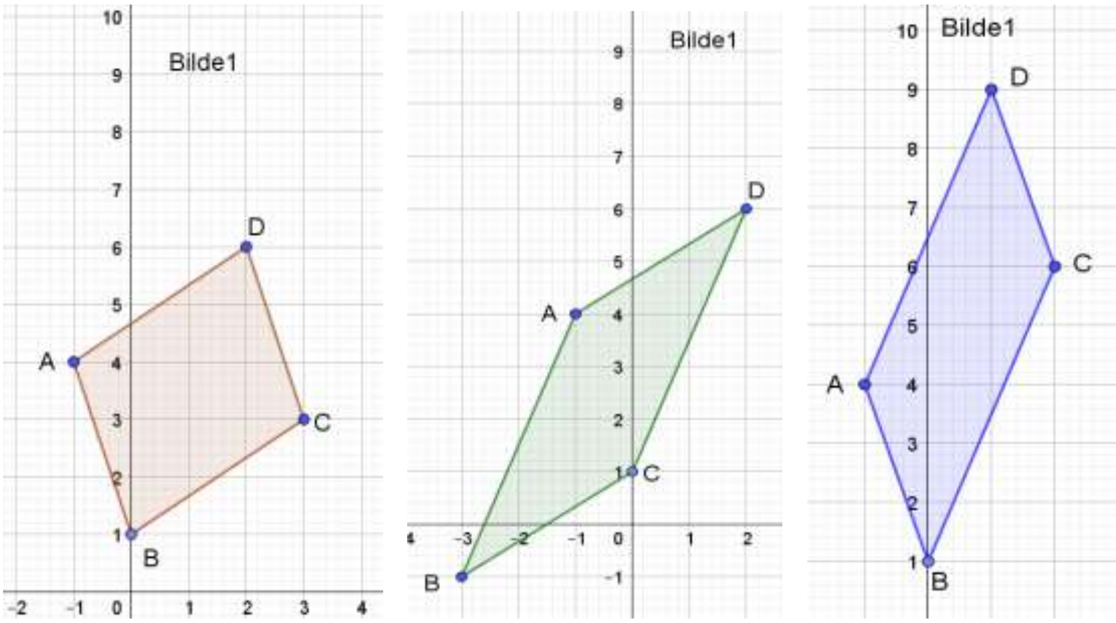
a. 2 av samma färg, betyder att $n = 2$, som ger $3 \cdot 2 - 2 = 4$ dragning
b. 3 av samma färg, betyder att $n = 5$, som ger $3 \cdot 5 - 2 = 13$ dragning

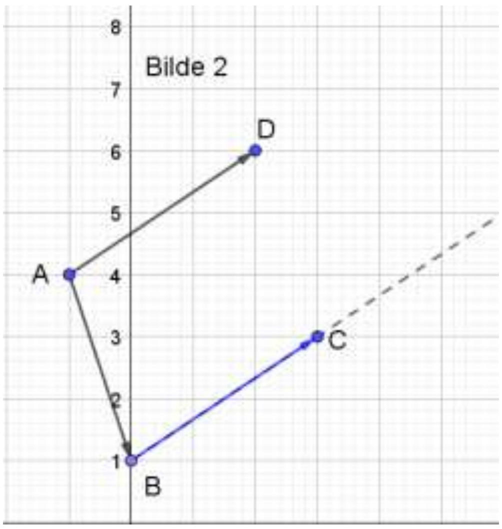
6. 7% Koordinatene til tre punkter i planet er følgende: $(-1,4)$, $(2,6)$ og $(0,1)$. Finn med nødvendige beregninger, det fjerde punktet slik at du får følgende geometriske figurer. Er figuren entydig bestemt? Begrunn svaret. Hvis figuren er ikke mulig, skal dette også argumenteres ved hjelp av beregninger.

- ***a.*** parallellogram 2,5%
- ***b.*** rombe 2,5%
- ***c.*** trapes 2%

Løsningsforslag: det er lov å bruke samme tegning på alle deloppgavene.

a. Det var litt uheldig formulering på oppgaven, om parallellogrammet er entydig bestemt eller ikke. Det viser seg siden ingen av punktene ble **navngitt**, det er 3 mulige måter å tegne det fjerde punktet, og sette bokstavene selv slik at de danner en riktig rekkefølge (se bilde 1). I dette tilfelle er det 3 mulige parallellogrammer, dermed blir ikke entydig bestemt.





Hvis man viser løsning som på «bilde 2» og sier at parallellogram er entydig bestemt så gir dette svaret også <u>full uttelling</u> siden det var vår feil å overse uklar formulering. Ellers skal man bruke vektorregning i oppgaveløsning. Vi skal se på det ene tilfellet:

ved å bruke vektorer finner man at

$\overrightarrow{AD} = [(2-(-1)),(6-4)] = [3,2]$, da må også $\overrightarrow{BC} = [3,2]$, der C er det fjerde punktet.

For $C = (x,y)$ blir da at

$\overrightarrow{BC} = [3,2] = [x-0, y-1]$, og man kan finne at

$$\begin{cases} x-0=3 \\ y-1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2+1 \end{cases} \Rightarrow C=(3,3).$$

b. lureoppgave fordi visuelt, virker at AC og AB er like lange. Poenget er at man skal sjekke lengdene – her er det også lov hvis man bruker Pytagoras og antall ruter som spenner den usynlige trekanten, ellers bruker vektor lengden: $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$, og $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+(-3)^2} = \sqrt{10}$. Kan ikke være rombe!

c. Det er uendelig mange måter å konstruere trapes, symbolsk notasjon: $k \cdot \overrightarrow{BC}$ for $k \in R\backslash\{0\}$. For $k = 1$ får man akkurat et parallellogram, for øvrige k verdier får man et trapes. På samme måte man kan argumentere for $k \cdot \overrightarrow{DC}$.

Poengfordeling:

oppgave	Max	Forklaring
6a	2,5%	1% for bare tegning og resonnement at «punkt skal være her», +1,5% for at man begrunner med beregninger
6b	2,5%	1% for svaret at rombe er ikke mulig, og at man resonnerer at det er ulike lengder, +1,5% hvis man resonnerer med beregninger
6c	2%	1% hvis man viser enkelte eksempler at det kan være ulike trapeser, 2% hvis man skriver generelt svar symbolsk, hvis man refereres kun til positive *k* verdier, det gir også full uttelling.

7. 6%

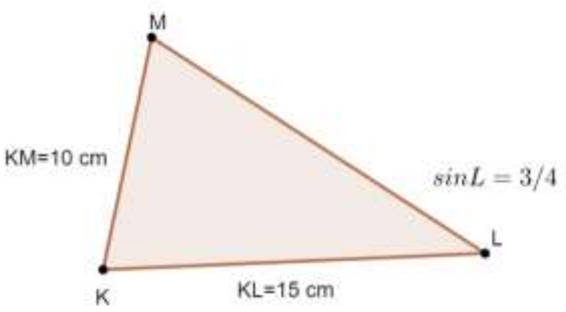
a. Formuler sinus setningen med egne ord; 1%

b. Er det mulig å konstruere trekanten *KLM* slik at $KL = 15$ cm, $KM = 10$ cm og $\sin L = \frac{3}{4}$? Begrunn svaret ditt med nødvendige beregninger. 2%

c. Undersøk for hvilke verdier av $\sin L$ er det mulig å konstruere trekanten, begrunn svaret med nødvendige beregninger. 3%

Løsningsforslag:

a) sinussetningen gjelder alle trekanter i planet. Forholdet mellom sinus verdi til en vinkel og lengden til motstående side er parvis det samme for alle vinkler og tilhørende sider.



b) her kan man lage en skisse og bruke sinus setningen. Lager en skisse for å plassere bokstaver (rekkefølgen mot klokka), og se plassering av de gitte størrelsene:

$$\frac{KM}{\sin L} = \frac{KL}{\sin M} \quad => \quad \frac{10}{0{,}75} = \frac{15}{\sin M}$$

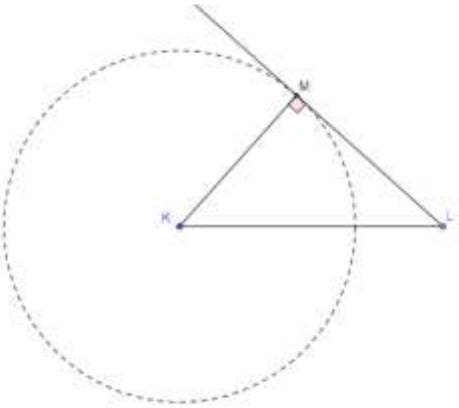
$$\sin M = \frac{0{,}75 \cdot 15}{10} = \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{10} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$$

Man har fått sinus verdi som er >1 som gjør det umulig å ha slik konstruksjon, må referere til sinus verdier og trigonometriske sirkelen.

c) vurderes til 3%, 2% hvis man bruker ferdig funksjonsknapper i GeoGebra eller måler vinkel med gradskiva for å finne sinus verdi senere, og viser til avrundete verdier, 3% for begrunnelse med beregninger som viser eksakte verdier.

1.måte er å bruke ulikhet ut fra sinus setningen: $\frac{KM}{\sin L} = \frac{KL}{\sin M}$

$=> \quad \frac{10}{x} = \frac{15}{\sin M} \quad => \quad \sin M = \frac{15x}{10}$ og der er krav at $\sin M > 0$, og $\sin M < 1 \quad => \quad \frac{15x}{10} < 1 \quad => \quad 15x < 10 \quad => \quad x < \frac{2}{3}$.



2. måte er å referere til at den største mulig vinkelen L blir når sida LM tangerer sirkelen (for større L verdier går LM løs fra sirkelen), da blir det slik at $\angle M = 90^0$, og etter sinus definisjon er det at $\sin L = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$. Den minste mulig vinkel L går mot 0, og dermed $\sin L \to 0$. Med andre ord ligger $\sin L$ verdier i intervallet $\left(0, \frac{2}{3}\right]$.

Poengfordeling:

oppgave	Max	Forklaring
7a	1%	logisk forklaring
7b	2%	• hvis man bruker passer og linjal, eller simulerer i GeoGebra og viser at konstruksjon er ikke mulig uten selve beregninger som grunnlag 1% • svaret begrunnet med beregninger 2% • hvis man mener at der er mulig konstruksjon 0%
7c	3%	• undersøke mulig *sin L* verdier ved å lage dynamisk bilde og bruke verktøyknapper, eller bruker gradskiva for å måle vinkel og finne tilsvarende sinus verdi, man viser ca verdier 2% • undersøke mulig *sin L* verdier og støtte med beregninger eller bruke bilderesonnement, man bruker eksakte verdier 3%

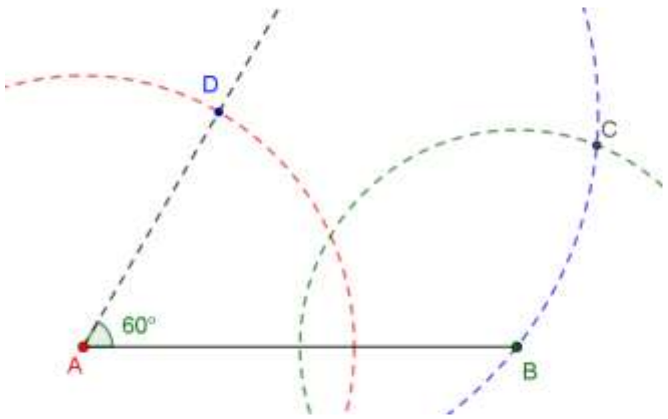
8. 9% Lag en konstruksjon av en konveks firkant ABCD der AB = 8 cm, BC = 4 cm, CD = 7 cm og DA = 5 cm, og $\angle A = 60^0$.

a. vis stegvis konstruksjon av denne figuren; 3%

b. regn arealet til denne figuren, vis eksakt svar. 6%

Løsningsforslag:

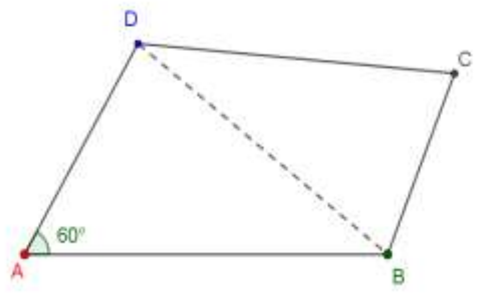
a. Konstruerer vinkel A som er 60^0, og setter av punktene B og D slik at AB = 8 cm, og AD = 5 cm.



Konstruerer sirkelbue med åpning 7 cm og sentrum i D, en annen sirkelbue har åpning 4 cm og sentrum i B, velger skjæringspunktet C slik at det blir en *konveks* firkant.

b. $A_{ABCD} = A_{ABD} + A_{BCD}$

Bruker arealsetningen:



$$A_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 60^0 = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\ cm^2$$

Bruker cosisnus setningen for å finne *BD*:

$$BD^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^0$$

$$BD^2 = 25 + 64 - 80 \cdot \frac{1}{2} = 25 + 64 - 40 = 49$$

$$BD = \sqrt{49} = 7\ cm$$

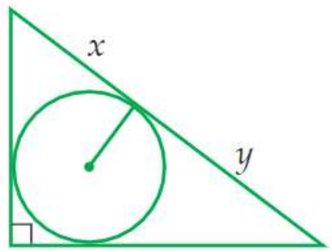
Det er minst 3 måter studentene har sett tidligere hvordan man kan finne arealet til *DBC*:

1. bruke cosinus setningen for å finne cos verdi til en av vinklene, bruke enhetsformelen $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ for å finne presis sinus verdi til denne vinkelen, og så bruke arealsetningen for trekanten *BCD* (tidskrevende);
2. de ble introdusert Herons arealsetning $A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$ der p er halvomkrets til trekanten, så kan bruke den også;
3. se at for likebeint trekant *DBC* gjelder at høyden skal dele trekanten i to kongruente rettvinklete trekanter, dvs sida *DC* skal også deles i to like lange linjestykker på 2 cm hvert. Ved å bruke Pytagoras finner høyden:
   $$h^2 + 2^2 = 7^2 \quad => \quad h^2 = 49 - 4 = 45 \quad => \quad h = \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}\ cm$$
   Arealet blir da $A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}\ cm^2$
   Arealet til hele figuren blir da: $A_{ABCD} = 10\sqrt{3} + 6\sqrt{5}\ (cm^2)$.

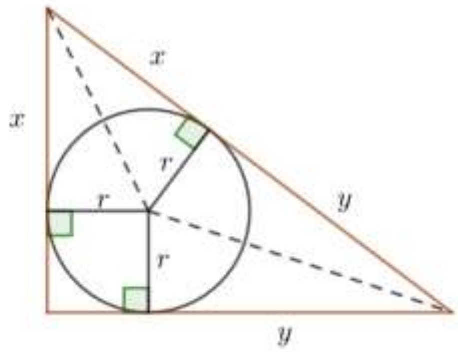
Poengfordeling:

oppgave	Max	Forklaring
8a	3%	• konstruksjon av 60^0 vinkel og sette av *AB* og *AD* 1% • velge riktig skjæringspunktet *C* mellom sirkelbuene med sentrum i punktene *B* og *D* slik at det blir <u>konveks</u> firkant 1% • sjekke at bokstavene plassert riktig og stemmer med opplysningene 1%
8b	6%	• resonnere at firkanten dannes av to trekanter, og finner arealet som summen av de to arealene 1% • finne arealet til trekanten *ADB* 1% • finne lengden *BD* 2% (bruk av cosinus setningen 1%, riktig utregning +1%) • finne arealet til trekanten *BCD* 2%

9. 6% Vis at arealet til trekanten kan uttrykkes som $x \cdot y$, der x og y er lengdene som hypotenusen blir delt i med tangeringspunktet til sirkelen.



Løsningsforslag:



$$A_{kvadrat} = r^2$$

$$A_{drake\ 1} = 2A_{trekant1} = 2\left(\frac{ry}{2}\right) = ry$$

$$A_{drake\ 2} = 2A_{trekant2} = 2\left(\frac{rx}{2}\right) = rx$$

$$A = r^2 + ry + rx$$

Arealet kan også regnes som:

$$A = \frac{(r+y)(r+x)}{2} = \frac{r^2 + rx + ry + xy}{2}$$

Man bruker begge areal formlene for å utlede formelen:

$$2A = (r^2 + rx + ry) + xy \quad => \quad 2A = A + xy \quad => \quad A = xy$$

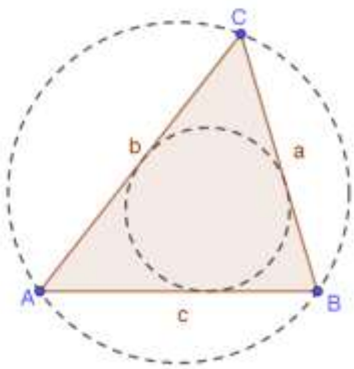
Poengfordeling:

oppgave	Max	Forklaring
9	6%	• riktig konstruksjon med markering av rette vinklene mellom *r* og trekantens sider 1% • argumentere hvorfor blir det rette vinkler (referere til tangent definisjon) 1% • argumentere at arealet dannes av to og to parvis kongruente trekanter og et kvadrat 1% + selve utregning 1% • argumentere at arealet kan regnes også som halvprodukt av kateter og vise utregning 1% • riktig omformering av formlene 1%

10. 17% La R være radius til den omskrevne sirkelen til en vilkårlig trekant ABC. Bevis at:

a. $\frac{a}{\sin A} = 2R$ 5%

b. $A_{ABC} = \frac{abc}{4R}$ 2%



La *r* være radius til den innskrevne sirkelen for en vilkårlig trekant *ABC*.

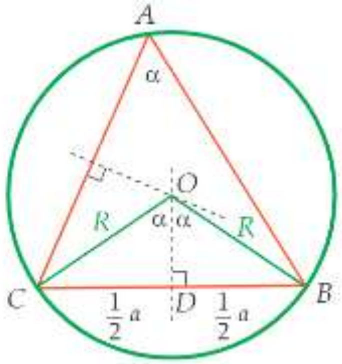
c. Bevis at $A_{ABC} = rp$, der *p* er halvomkrets 4%

To av sidene i en trekant er 13 m og 15 m lange, radius til innskrevet sirkel er 4 m lang, og radius til omskrevet sirkel er 8,125 m lang. Regn ut:

d. lengden til den tredje sida 3%

e. lengden til den korteste høyden i trekanten. 3%

Løsningsforslag:



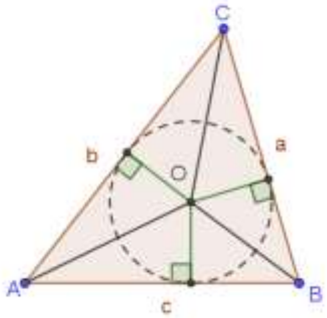
a. Man må vise til at sentrum ligger der midtnormalene skjærer hverandre, og dermed dannes det likebeint trekant (midtnormalens egenskap). Referere til egenskap til en likebeint trekant at midtnormalen er også halveringslinja for $\angle COB$. Referere til Thales setning at $\angle CAB = \frac{1}{2}\angle COB$, og markere tilsvarende (brukt α på bildet).

$$\sin\alpha = \frac{\frac{1}{2}a}{R} = \frac{a}{2R} \quad => \quad 2R = \frac{a}{\sin\alpha} \quad \text{eller} \quad 2R = \frac{a}{\sin A}$$

b. bruker arealsetningen og tidligere resultat fra oppg. a.:

$$A = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

c. viktig med riktig tegning, og vise at arealet dannes av tre trekanter som har samme høyde *r*, og grunnlinjene er henholdsvis *a*, *b*, og *c*. Man må referere til tangent definisjon at den danner en rett vinkel i tangeringspunktet. Da får man følgenden:



$$A = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br = \frac{1}{2}r(a+b+c) = r \cdot \frac{1}{2}P = rp$$

d. her må man bruke formlene fra oppg. ***b***. og ***c***. og sette opp en likning, og løse den: la den tredje sida være *x* m lang.

$$A = \frac{13 \cdot 15 \cdot x}{4 \cdot 8{,}125} \quad og \quad A = \frac{13+15+x}{2} \cdot 4 \quad => \quad \frac{13 \cdot 15 \cdot x}{32{,}5} = (28+x) \cdot 2$$

$13 \cdot 15 \cdot x = (28+x) \cdot 2 \cdot 32{,}5$

$13 \cdot 15 \cdot x = (28+x) \cdot 65$ deler begge sider på 13

$15 \cdot x = (28+x) \cdot 5$ deler begge sider på 5

$3x = 28 + x \quad => \quad 2x = 28 \quad => \quad x = 14\,m$

e. den korteste høyden skal gå mot den lengste grunnlinja som er 15 m. Ved å bruke arealformelen får at $A = \frac{15h}{2}$, arealet finner ved å bruke en av formlene fra oppg. ***d***., f.eks. $A = p \cdot r = \frac{13+14+15}{2} \cdot 4 = (13+14+15) \cdot 2 = 42 \cdot 2 = 84\,m^2$

$$\frac{15h}{2} = 84 \quad => \quad 15h = 168 \quad => \quad h = \frac{168}{15} = \frac{56}{5} = 11{,}2\,m$$

Poengfordeling:

oppgave	Max	Forklaring
10a	5%	• riktig konstruksjon, og resonnere at sentrum ligger der midtnormalene skjærer hverandre 1% • resonnere at midtnormalen som geometrisk sted, og dermed dannes likebeint trekant, dvs OB = OC 1% • resonnere at en likebeint trekant har en slik egenskap at midtnormalen er også vinkelhalveringslinja 1% • referere til Thales setning og markere at halvparten av sentralvinkel er like stor som periferivinkel 1% • riktig omformering 1%
10b	2%	• bruk av arealsetningen 1% • riktig omformering 1%
10c	4%	• lage hjelpekonstruksjon og vise at det blir 3 trekanter 1% • referere til tangent definisjon som danner rette vinkler 1% • skrive uttrykk for hvert av arealene 1% • riktig omformering av uttrykket 1%
10d	3%	• velge areal formler (oppg. ***b, c***) som skal brukes 1% • bruke dem riktig for å sette opp en likning 1% • løse likningen riktig 1%
10e	3%	• resonnere at areal formel skal brukes eller finne areal 1% • velge riktig høyden og tilsvarende grunnlinja 1,5% • finne høyden ved regning 0,5% **velger man en «feil» høyde men løser riktig ved å bruke arealet, så får man 1,5%**

***Bruker man en annen type bevis som skiller seg fra den gitte i løsningsforslaget, så settes poeng ut fra hvor fullstendig beviset er, med påfølgende tegning/skisse og begrunnelser.**