Høgskolen i Østfold

SENSORVEILEDNING

Emnekode:	LSV1MAT12 V1
Emnenavn:	Tall og algebra, funksjoner 1 (5.-10. trinn)
Eksamensform:	Individuelt, skriftlig
Dato:	19.08.20
Faglærer(e):	Henrik Stigberg
Eventuelt: Sensorveiledningen består av 26 sider	

Innhold

Denne sensorveiledningen inneholder:

1. Om eksamen i emnebeskrivelsene
2. Andre opplysninger om eksamen
3. Vurderingskriterier for den enkelte karakter
4. Oppgavene med stikkordsmessig løsningsforslag

1. Om eksamen i emnebeskrivelsene

Skriftlig, seks timers individuell eksamen.

Kandidaten prøves både i matematikkfaglige og matematikkdidaktiske oppgaver.
Tillatt hjelpemiddel: godkjent kalkulator.

Karakterregel: A-F

2. Andre opplysninger om eksamen

Dato og tidspunkt: 19.08.20.

Antall kandidater: Det er 1 studenter oppmeldt til eksamen.

3. Vurderingskriterier for den enkelte karakter

Dette skjemaet er også tilgjengelig for studenter.

	A	B	C	D	E	F
Generelle kriterier Kilde: https://www.uio.no/studier/eksamen/karakterskala/fagspesifikk-karakterbeskrivelse/mn-math.html#skriftlig	**Fremragende** prestasjon der kandidaten har løst problemer som krever fantasi og innsikt. Besvarelsen viser at kandidaten fullt ut behersker både de begrepsmessige, regnetekniske og anvendelsesmessige delene av emnet. Fremstillingen er klar og presis med korrekt bruk av notasjon og fagterminologi. Noen få mindre feil eller blanke punkter kan tillates.	**Meget god** prestasjon der kandidaten har løst problemer som går utover det rutinemessige, og som krever god oversikt over emnet. Besvarelsen viser meget god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset. Fremstillingen er klar og med stort sett riktig bruk av terminologi og notasjon.	**God** Gjennomsnittlig prestasjon der kandidaten har løst oppgaver av middels vanskelighetsgrad fra de fleste deler av kurset. Besvarelsen viser god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har ikke i særlig grad klart å anvende sine ferdigheter og kunnskaper på oppgaver som går ut over det rutinemessige. Fremstillingen er grei å forstå, men kan ha en del formelle mangler.	**Nokså god** Prestasjon under gjennomsnittet der kandidaten har løst eller kommet et stykke på vei med oppgaver fra flere sentrale deler av kurset. Besvarelsen viser kjennskap til de viktigste teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har vanskelig for å komme helt i mål selv på rutinepregede oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men kan ha en god del formelle mangler.	**Tilstrekkelig** Prestasjon som tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Besvarelsen viser at kandidaten har kjennskap til begreper, teknikker og anvendelser fra flere deler av kurset, og at han/hun til en viss grad kan bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men røper klare feil og misforståelser.	**Ikke bestått** Prestasjon som ikke tilfredsstiller minimumskravene. Besvarelsen viser at kandidaten har manglende kjennskap til sentrale teknikker, begreper og anvendelser, eller manglende evne til å bruke sine kunnskapene til å løse oppgaver. Besvarelser som bare viser beherskelse av en avgrenset del av emnet, vil normalt havne i denne kategorien.
Prosent av besvarelsen som kan indikere karakter	[92% - 100 %]	[77% - 92 %>	[58% - 77%>	[46 % - 58%>	[40 % - 46%>	[0 % - 40%>

Universitets – og høgskolerådet har utformet disse generelle, kvalitative beskrivelsen av de ulike karakterene:

symbol	betegnelse	generell, ikke fagspesifikk beskrivelse av vurderingskriterier
A	fremragende	Fremragende prestasjon som klart utmerker seg. Kandidaten viser svært god vurderingsevne og stor grad av selvstendighet.
B	meget god	Meget god prestasjon. Kandidaten viser meget god vurderingsevne og selvstendighet.
C	god	Jevnt god prestasjon som er tilfredsstillende på de fleste områder. Kandidaten viser god vurderingsevne og selvstendighet på de viktigste områdene.
D	nokså god	En akseptabel prestasjon med noen vesentlige mangler. Kandidaten viser en viss grad av vurderingsevne og selvstendighet.
E	tilstrekkelig	Prestasjonen tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Kandidaten viser liten vurderingsevne og selvstendighet.
F	ikke bestått	Prestasjon som ikke tilfredsstiller de faglige minimumskravene. Kandidaten viser både manglende vurderingsevne og selvstendighet.

4. Stikkordsmessig løsningsforslag på de enkelte oppgavene

<u>Viktige elementer for vurderingen:</u>

- Det er indikert en maksimumspoengsum for hver av deloppgavene, men kun i noen grad utdypet hvordan poeng skal settes utover dette. Det er imidlertid av stor betydning med en helhetlig vurdering.
- Nedenfor finnes forslag på løsninger. Det vil selvsagt være flere andre fremgangsmåter som kan gi full uttelling så her må det vurderes i hvert enkelt tilfelle.

Oppgave 1 (16%)

a) Følgende regnestykker er skrevet i titallsystemet: (4%)

i) **$24 \cdot 13 =$**

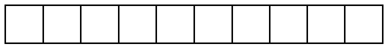
ii) **$438 : 3 =$**

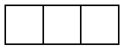
Hvordan kan du visualisere disse regnestykkene skrevet i titallsystemet for dine elever slik at det gir forståelse på veien mot standardalgoritmene?

Her er noen av de visualiseringene og konkretiseringene man kan gjøre i forbindelse med multiplikasjonen $24 \cdot 13$:

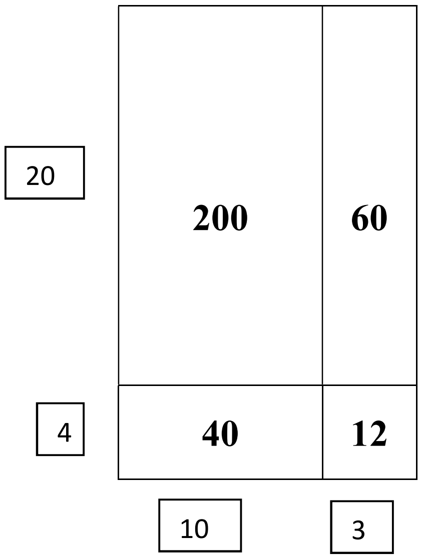
Tekstoppgave: 13 barn får hver sin kalenderpakke hver dag i desember fram til og med julaften. Hvor mange kalenderpakker blir det totalt? (Dette kan tegnes for hvert barn)

Multibasemateriell: En konkretisering av regnestykket gir 24 ganger av multibasemateriellet nedenfor:

24 tiere: 

24 treere: 

Arealbetraktning:



<u>Distributive lov:</u> Å splitte opp de enkelte faktorene i et multiplikasjonsstykke.

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & & & & & \underline{1} & & \\ & 2 & 4 & \cdot & 1 & 0 & = & 2 & 4 & 0 \\ + & 2 & 4 & \cdot & & 3 & = & & 7 & 2 \\ \cline{7-10} & & & & & & = & 3 & 1 & 2 \\ \cline{7-10} \end{array}$$

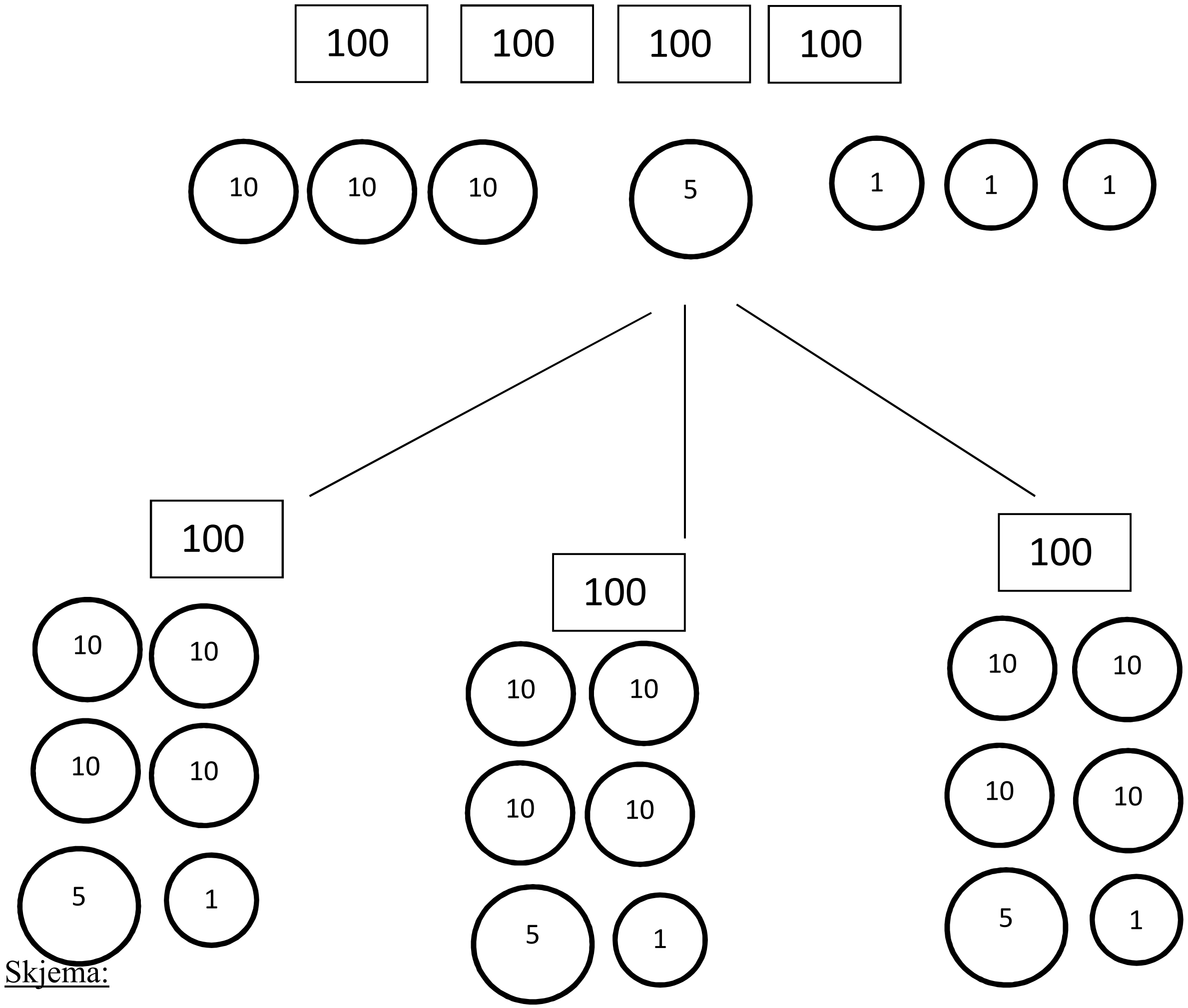
Gjennom slike tilnærminger kan de prøve å komme fram til en algoritme på egenhånd. Noen vil sette det opp slik vi ser ovenfor. Da kan man veilede videre til en mer standardisert algoritme.
Her er noen av de visualiseringene og konkretiseringene man kan gjøre i forbindelse med divisjonsstykket 438 : 3:

<u>Tekstoppgave:</u>

438 km skal deles inn i 3 like dagsetapper. Hvor mange kilometer blir det hver av dagene?

Med penger:

Man tenker seg at 438 kr skal deles på tre og fordeler pengene i tre hauger. Dette tegnes opp. Her veksler man inn den ene hundrelappen i tiere.



Skjema:

Deling i stadig mindre porsjoner der disse trekkes fra etter hvert.

	Del 1	Del 2	Del 3
438 : 3	100	100	100
- 300			
138	30	30	30
- 90			
48	15	15	15
- 45			
3	1	1	1
- 3			
0	=146	=146	=146

Fra fordeling av penger til algoritmen:

	4 3 8 : 3 =	
Deling av hundrelapper	3 0 0	1 0 0
	1 3 8	
Deling av tiere	1 2 0	4 0
	1 8	
Deling av enere	1 8	6
	0	1 4 6

b) Vis hvordan du finner ut om 237 er et primtall. (2%)

Metode 1: 1. Finne primtall under 16 (fordi roten av 237 = 15,4):

2 – 3 – 5 – 7 – 11 - 13

2. Divider 237 med disse primtallene:

237 : 2 =

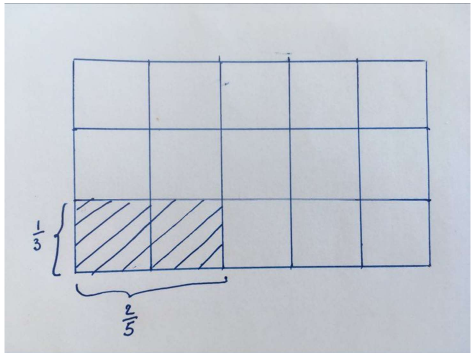
237 : 3 = 79 (dermed er 237 et sammensatt tall)

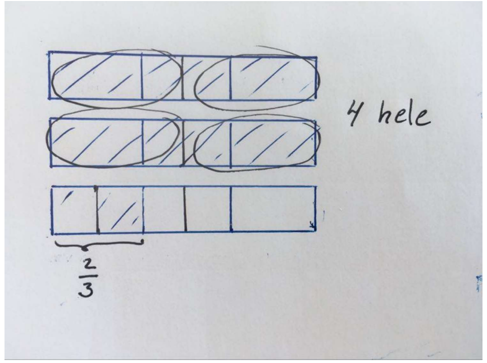
Metode 2: Finn tverrsummen av 237 og ser at tverrsummen er delelig med 3.

c) Vis med tegning hvordan du kommer fram til et svar (4%)

i) $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$

ii) $\frac{7}{3} : \frac{1}{2}$

i) Vis med arealbegrepet. $\frac{2}{15}$ er markert: 

ii) Vis med målingsdivisjon. Hvor mange $\frac{1}{2}$ passer i $\frac{7}{3}$: 

d) Gi et konkret eksempel på hvordan største felles faktor og minste felles multiplum kan brukes i skolen. (3%)

<u>Største felles faktor</u> brukes når en brøk skal forkortes:

Eks: $\frac{8}{20} = \frac{8:4}{20:4} = \frac{2}{5}$ fordi sff (8,20) = 4

<u>Minste felles multiplum</u> brukes når to brøker skal adderes/subtraheres, og det må finnes en fellesnevner:

Eks: $\frac{5}{4} + \frac{7}{8} = \frac{5 \cdot 2}{4 \cdot 2} + \frac{7}{8} = \frac{10}{8} + \frac{7}{8} = \frac{10+7}{8} = \frac{17}{8}$ fordi mfm (4,8) = 8

e) Gi en begrunnelse for at $a^0 = 1$ når *a* er ulik 0 (null). (3%)

Vi vet at $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Når $n = m$, vil $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$. Samtidig vet vi at når telleren og nevneren er like store, vil brøken kunne forkortes til 1. Derfor vil $a^0 = 1$.

Oppgave 2 (14 %)

a) Regn ut og lag et praktisk eksempel til hver av oppgavene nedenfor. (4%)

i) $\mathbf{\frac{4}{6} : 3 = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}}$

En pizza er delt inn I 6 biter. Per og Lise tar hver sin del. Resten skal fordeles på Knut, Sofie og Ole. Hvor mye blir det til hver?

ii) $(-\mathbf{3}) + (-\mathbf{7})$ = -3$-$7 = -10

Eva låner 3 kr av Trygve. Dagen etter økes gjelden med 7 kr til. Hvor mye skylder hun da?

b) Skriv desimaltallene som brøk: (3%)

i) $\mathbf{3,058}$ = 3 + $\frac{58}{1000} = 3\,\frac{58}{1000} = 3\,\frac{29}{500}$

ii) $\mathbf{43,\overline{23}}$

Vi setter x= $43,\overline{23}$og siden periodelengden er 2 (det er de to sifrene 2 og 3 som gjentar seg) multipliserer vi med 100 og får 100x = $4323,\overline{23}$

Dermed får vi at

100x - x = $4323,\overline{23} - 43,\overline{23}$

99x = 4280

x $= \frac{4280}{99}$

c) Følgende oppgave kunne vært hentet fra ungdomstrinnet: (3%+4%)

I butikker kan du ofte få tilbud av typen ”Kjøp 3, betal for 2”. Man får tre varer til prisen for to hvis det er samme vare til samme pris. Hvor mange prosent avslag får du?

1) **Gjør oppgaven ovenfor, oppgi svaret med en desimal.**

Tre varer koster 3 x der x er prisen på en av varene. Disse tre varene kan man få til prisen på 2, dvs. 2x.

Dette betyr:

3x – avslaget i prosent = 2x

3x - $\frac{3x \cdot p}{100} = 2x$ der p er prosentandelen

300x – 200x = 3xp

100x = 3xp

p = $\frac{100x}{3x}$

p = $\frac{100}{3}$=$33,\overline{3} \approx 33,3$

Det gis 33,3 % avslag når man får tilbudet og prisen er den samme på alle varene.

2) **Hvordan ville du tilrettelagt for elevenes forståelse av denne oppgaven?**

Her vil det eksempelvis være bedre å bruke konkrete eksempler på priser. Hvis man ikke finner prosentandelen ved regning, kan man forsøke seg på ulike prosentandeler. Kan det være 50 %? Lavere andel enn 50 eller høyere? Kanskje regne ut for flere ulike andeler.

Oppgave 3 (17 %)

a) **Matematikkvansker kan ha *didaktiske årsaker*. Forklar hva som menes med *didaktiske årsaker*. Gi eksempler. (3%)**

Når en elev har matematikkvansker der årsakene er didaktiske, vil det dreie seg om undervisningssituasjonen. Dette innbefatter for eksempel:

- Valg av læreverk eller hjelpemidler
- Undervisningens progresjon (rekkefølge av lærestoff og tempo)
- Undervisningens innhold (tilpassede oppgaver, utfordringer, variasjon, eksempler, læringsstiler, arbeidsmåter)
- Lærerens holdning (engasjement, se elevene)
- Evaluering/vurdering/kartlegging av undervisning og elever
- Rammebetingelser (ressurser, klasserom)
- Organisering av elever (individuelt, grupper (homogene eller heterogene), plenum)

Det holder med at studentene kommer med noen av disse eksemplene.

b) **I artikkelen «*Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk*» løfter forfatterne fram sentrale kjennetegn på god undervisning. (3% + 4%)**

i) **Hvilke sentrale kjennetegn på god undervisning løftes fram?**

- undersøkende matematikkundervisning
- forståelse
- selvinnsikt og bevissthet
- motivasjon
- tilpasset opplæring

Disse elementene bør være med.

ii) Skriv maks ½ side om hvordan du kan legge til rette for god undervisning. Du må gi konkrete eksempler!

Studenten skal gi konkrete eksempel som passer opp mot punktene oven.

Svaret **kan** gå på at studenten gir eksempel på problemløsningsoppgave eller utforskende oppgave og beskriver hvordan den kan jobbe med slik oppgave. Lurt å ha med noe om felles oppstart slik at alle elevene forstår oppgaven, ensklit arbeid slik at vara enkelt elev kan få en inngang å begynne å tenke. Gruppearbeid for å fremme diskusjon. Læreren beveger sig rundt og støtter gruppene og notere ulike løsninger som kan presenteres og diskuteres til en oppsummering. Læren og elever drar felles slutsatser. Etterpå får eleven skrive en exit ticket om de to viktigste sakene som den har lært på timen.

Svaret **kan** gå mot oppgave av typen «hvem skal ut».

Svaret **kan** gå mot oppgave av typen «matematikk i tre akter»

Andra svar som svarer på oppgaven kan også gi full poeng.

c) Mange elever sliter med misoppfatninger. Nedenfor ser du to eksempler på diagnostiske oppgaver. (3% + 4%)

$$\mathbf{5 + 7 = \_\_ + 1}$$

$$\mathbf{3 + 2 \cdot \_\_ = 15}$$

i) Beskriv hva en vanlig misoppfatning er og knytt det til vær av disse to eksemplene.

$5 + 7 = \_\_ + 1$

Eleven kan ha et dynamisk syn på likhetstegnet, «her kommer svaret»

$\mathbf{3 + 2 \cdot \_\_ = 15}$

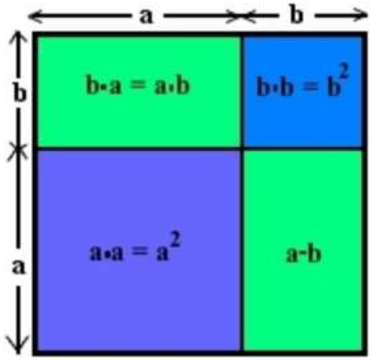
Eleven leser alltid fra venstre til høyre, og kan/forstår ikke prioriteringsreglene.

ii) **Velg en av misoppfatningene. Beskriv hvordan du kan jobbe videre ut ifra diagnostisk undervisning med en elev som har slik misoppfatning. Tenk på å være så konkret som mulig.**

Studenten kan ha med noen type av kartlegging, statisk eller dynamisk, men trenger ikke da vi utgår ifra at eleven har denne misoppfatning.
Eksempel på kognitiv konflikt og hvordan man kan løse den.
Eksempel med likhetstegnets betydelse, ikke bara ha det ukjente «svaret» på høyre side. Godtar andra eksempler.
Eksempel som viser på sammenheng mellom konkreter og symboler. Godtar andra eksempler.
Nåe om at man bør låte eleven jobbe videre med den nye kunnskapen.

Oppgave 4 (13 %)

a) **En elev sliter med å forstå første kvadratsetningen. Hvordan skulle du vist og forklart første kvadratsetningen slik at det gir en forståelse? (2%)**



Andre måter kan også gi poeng.

b) **Løs ligningene nedenfor: (2% + 2% + 3%)**

i) $\mathbf{2(x-1)-4(x+2)=12}$

$$2x - 2 - 4x - 8 = 12$$
$$-2x - 10 = 12$$
$$-2x = 22$$
$$x = -11$$

ii) $\boldsymbol{x^2 - 6 = 3}$

$$x^2 = 9$$
$$x_1 = 3$$
$$x_2 = -3$$

iii) Løs følgende likning: $\boldsymbol{\frac{7x-2}{3} + 3 = \frac{8x-2}{2}}$

$$\frac{2(7x-2)}{2 \cdot 3} + \frac{18}{6} = \frac{3(8x-2)}{3 \cdot 2}$$
$$14x - 4 + 18 = 24x - 6$$
$$20 = 10x$$
$$2 = x$$

c) **Løs likningssettet:** $\begin{cases} -4x = 3y - 2 \ (1) \\ \boldsymbol{2y = 4x - 8 \ (2)} \end{cases}$ **(4%)**

$$(2): y = 2x - 4$$
$$(2) \rightarrow (1): -4x = 3(2x - 4) - 2$$
$$-4x = 6x - 12 - 2$$
$$-10x = -14$$
$$x = 1{,}4$$
$$(2): y = 2 \cdot 1{,}4 - 4 = -1{,}2$$

Oppgave 5 (20 %)

a) Gjør om tallet 68_{ti} til et tall i femtallsystemet og tallet $9B_{tretten}$ til titallsystemet. (3 %)

$68_{ti} = 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 233_{fem}$

$9B_{tretten} = 9 \cdot 13^1 + 11 \cdot 13^0 = 117 + 11 = 128_{ti}$

b) Regn ut i det angitte tallsystemet: (8%)

1) $\mathbf{573_{åtte} + 747_{åtte} =}$ **2)** $\mathbf{3992_{tolv} - A63_{tolv} =}$

3) $\mathbf{432_{fem} \cdot 34_{fem} =}$ **4)** $\mathbf{4112_{sju} : 31_{sju} =}$

i) $\mathbf{573_{åtte} + 747_{åtte} =}$

	1	1	1		
		5	7	3	åtte
+		7	4	7	åtte
=	1	5	4	2	åtte

ii) $\mathbf{3992_{tolv} - A63_{tolv} =}$

		C		C	
	~~3~~	9	~~9~~	2	tolv
-		A	6	3	tolv

=	2	B	2	B	tolv

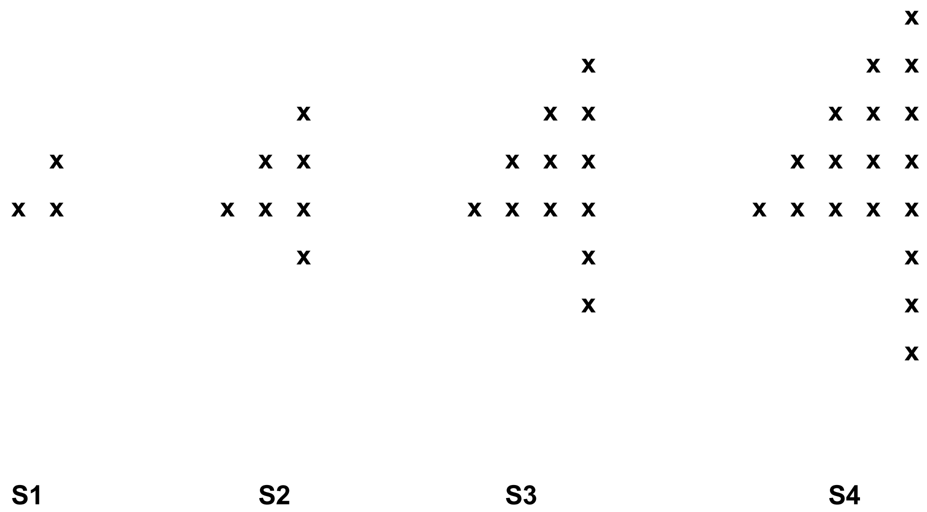
iii) $\mathbf{432_{fem} \cdot 34_{fem} =}$

4	3	2	fem	·	3	4	fem
			3	3	3	3	
+		2	4	0	1		
=		3	2	3	4	3	fem

iv) $\mathbf{4112_{sju} : 31_{sju} =}$

4	1	1	2	sju	:	3	1	sju	=	1	2	2	sju
3	1												
1	0	1											
	6	2											
		6	2										
		6	2										
			0										

c) Nedenfor ser du firetallstallene (2% + 3% + 4%)



i) **Hvordan ser figur nr. S5 ut?**
S5 består av en trekant med seks kryss nederst, deretter fem, deretter fire, så tre , to og ett kryss øverst, en stilk med fire kryss nederst. Til sammen 25 kryss.

ii) **Forklar med ord hvordan figurene er bygd opp og vokser.**
Figurene består av en stilk som har like mange kryss som nummeret på figuren minus 1 og en trekant som er ett nummer mer enn figuren.

iii) Finn en generell formel for firetall nr. n.
Nr n blir da: $\frac{(n+1)(n+2)}{2}+(n-1)=\cdots=\frac{n}{2}$(n+5)

Oppgave 6 (20 %)

a) Nedenfor ser du Janviers tabell om overganger mellom de ulike representasjonsformene for funksjoner. Velg ut to overganger, og beskriv hver av disse ved et eksempel. De to overgangene du velger ut, skal til sammen inneholde alle fire representasjonsformene i tabellen. (4 %)

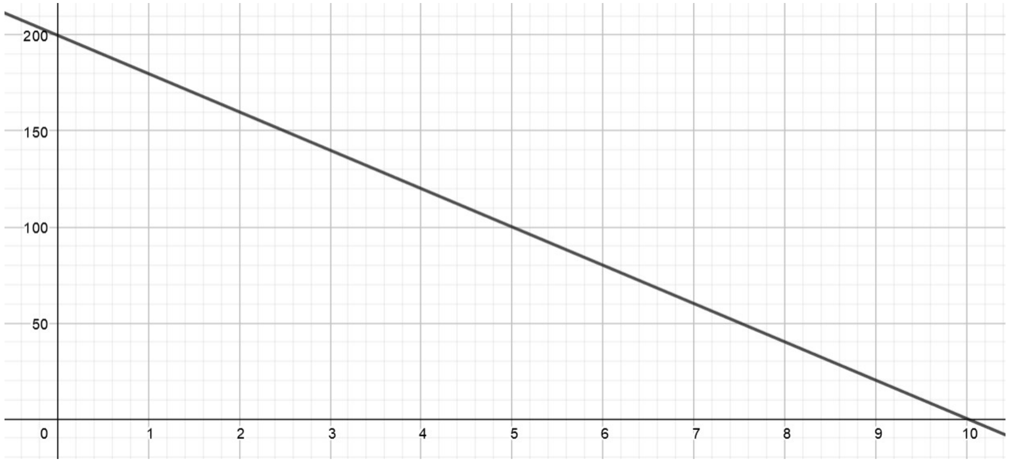
Fra/til	Situasjon	Tabell	Graf	Formel
Situasjon		**TS**	**GS**	**FS**
Tabell	**ST**		**GT**	**FT**
Graf	**SG**	**TG**		**FG**
Formel	**SF**	**TF**	**GF**	

Her er det ubegrenset med muligheter! Et eks. kan være (fra situasjon til formel): En bank lover deg en fast årlig rente på 4% i 10 år framover dersom du setter inn et beløp på kr 100000. Denne situasjonen (teksten) gir følgende formel for hvordan innskutt kapital endrer seg etter som tiden t (i år) endrer seg: Kapital = $100000(1.04)^t$.

Et eksempel på overgangen mellom tabell og graf kan være en tabell over høydeutviklingen til et barn fra det er nyfødt til det er 6 år. Vi plotter alder og høyde inn i et koordinatsystem og trekker en linje mellom punktene.

b)

i) Tegn følgende linje i et koordinatsystem: $y = 200 - 20x$ (2%)



ii) Gi en konkret kontekst til oppgaven. Beskriv hva stigningstallet og konstantallet betyr i denne kontekst. (2%)

Et kar inneholder 200 liter (konstanttallet) vann fra begynnelsen (t=0). Noen begynner å tømme karet og det rinner ut 20 liter/minutt (stigningstallet).

c) **La $f(x)$ være annengradsfunksjonen gitt ved $f(x) = 2x^2 - 16x + 14$.**

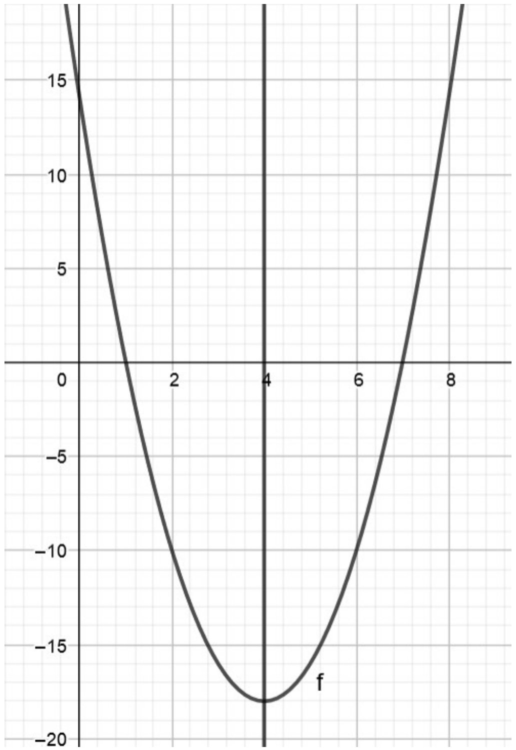
i) **Vis hvordan du kan finne symmetrilinja til grafen til $f(x)$. (2%)**

Symmetrilinje ligger mitt mellom nullpunktene (om det finns nullpunkter). Søker løsning til likningen $2x^2 - 16x + 14 = 0$

$$2(x^2 - 8x + 7) = 0$$
$$2(x - 1)(x - 7) = 0$$
$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 7$$

Mitt mellom disse punkter (1,0) og (7,0) ligger (4,0), symmetrilinje er altså $x = 4$

ii) **Skisser grafen til f, og tegn inn symmetrilinja til grafen til f i samme koordinatsystem. (2%)**



iii) Hva er definisjonsmengden og verdimengden til $f(x)$? (2%)

Definisjonsmengde $D_f =]-\infty, \infty[$

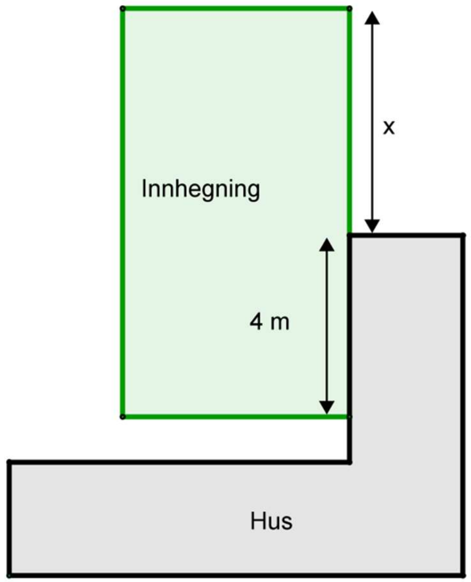
Verdimengde $V_f = [-18, \infty[$

Trekker ikke for notasjon om det er korrekte verdien.

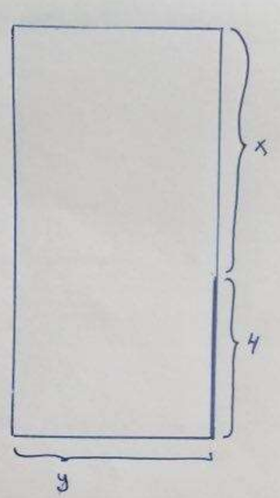
d) Du skal lage en rektangulær innhegning med 200 m gjerde. Innhegningen skal ligge inntil et hus, se tegningen.

i) Hva må x være for at arealet til innhegningen blir maksimalt? (5%)

ii) Hva er det maksimale arealet? (1%)



(m)



$200 = 2y + 2(x+4) \Leftrightarrow 100 = y + x + 4$

$\Leftrightarrow y = 96 - x$

$A(x) = (96-x)(x+4)$ ser att funktionen har toppunkt

$A(x) = 0$ då $x_1 = 96$

$x_2 = -4$

Toppunkt mitt mellom x_1 og x_2; da $x = 46$

Svar $x = 46$

ii $A(46) = (96-46)(46+4) = 50^2 = 2500$

Svar $2500\ m^2$

Vedlegg:

Teorem. Løsningsformelen for andregradslikninger

La *a*, *b* og *c* være reelle tall, der $a \neq 0$. Likningen $ax^2 + bx + c = 0$ har løsningene

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$