SENSORRVEILEDNINGEN NASJONAL DELEKSAMEN I MATEMATIKK FOR GRUNNSKOLELÆRER - UTDANNINGEN

GLU 1 – 7

Oppgave 1

a) Gi et eksempel på en oppgave hvor elever som oppfatter likhetstegnet som en operator ofte vil svare feil. Gi to mulige feilsvar som elever vil kunne svare på oppgaven du har laget og forklar hvorfor elever gir disse svarene.

Det vil være flere mulige løsninger. Et eksempel på en oppgave kan være $10 - 4 = \_ + 7$ der eleven svarer at det på streken skal stå 6 fordi $10 - 4$ er 6 eller 13 fordi $10 - 4 + 7$ er 13. Et annet eksempel på oppgave kan være $\_ = 7 + 2$. På denne oppgaven vil en elev som ser på likhetstegnet som en operator kanskje snu om på oppgaven og skrive $7 + 2 = \_$ fordi han mener at en ikke kan ha "svaret" på venstre side av likhetstegnet. Poeng gis dersom eksemplene og forklaringene er rimelige.

2 poeng for å gi et eksempel på en oppgave hvor elever som oppfatter likhetstegnet som en operator ofte vil svare feil på og gir to mulige feilsvar eleven kan kunne svare på oppgaven samt forklarer hvorfor elevene kan gi disse feilsvarene.
1 poeng for å gi et eksempel på en oppgave hvor elever som oppfatter likhetstegnet som en operator ofte vil svare feil på og gir ett mulig feilsvar eleven kan kunne svare på oppgaven samt forklarer hvorfor elevene gir dette feilsvaret.
0 poeng ellers

Elever blir bedt om å finne tallet slik at likheten i følgende oppgave er sann:

$$10 - 4 = \_ + 7$$

b) Vis hvordan elever kan bruke tallinja til å løse likheten.

2 poeng for å benytte tallinja på en slik måte at man får frem likhetsrelasjonen mellom de to uttrykkene. Altså å sammenlikne 7 med 10-4 på tallinja, og på den måten finne ut hva som må legges til 7 for at det skal bli likt.
1 poeng for å bruke tallinja til å komme frem til et svar, ved at man for eksempel tar 10-4-7 på tallinja for å komme frem til -1.
0 poeng ellers.

c) Guro har hatt en innføringstime om det å løse ligninger, og hun ga elevene følgende problem:

$$6 - \square = 10 - 7$$

Hun ba elevene om å avgjøre hvilket tall som kunne skrives inn i den tomme boksen for å gjøre uttrykket sant. Alle elevene fikk det riktige svaret 3, men de brukte ulike strategier. Er noen av følgende strategier riktige, i så fall hvilke(n)? Begrunn svaret ditt.

Hilde: 6 er 4 mindre enn 10 på den andre siden. Da må jeg trekke fra 4 fra 7 for å få det samme, så svaret er 3.

Fredrik: Når jeg regner 10 minus 7 får jeg 3, så 3 må settes inn i den tomme boksen for å gjøre uttrykket sant.

Marit: $10 - 7 = 3$, så jeg må finne ut hva jeg trekker fra 6 for å få 3. Siden $6 - 3 = 3$, blir svaret 3.

1 poeng for å angi begge de riktige strategiene, der strategien til Hilde og Marit er korrekte, med en rimelig forklaring på hvorfor disse strategiene er riktig.
0 poeng ellers.

Oppgave 2

Tenk på et tall, multipliser tallet med 2, legg til 4 og del svaret ditt på 2. Multipliser tallet du nå har med 3. Trekk fra det dobbelte av tallet du opprinnelig valgte, og trekk fra 6.

a) Vis algebraisk en generell sammenheng mellom det tallet en velger og det svaret en får.

1 poeng kandidaten setter opp et algebraisk uttrykk som kan forenkles til x, når x er det tallet man tenker på i utgangspunktet. Det gis ikke poeng dersom en bare illustrerer ved hjelp av et talleksempel. Kandidaten kan sette opp utrykket algebraisk, hvor x er tallet man tenker på og regne det ut slik

$$\frac{2x+4}{2} \cdot 3 - 2x - 6 = (x+2) \cdot 3 - 2x - 6 = 3x + 6 - 2x - 6 = x$$

b) Lag en «tenk på et tall»-oppgave til elever på 6.trinn hvor elevene må bruke alle de fire regneartene, og der alle elevene får samme tall som svar. Vis algebraisk at oppgaven fører til at alle elevene får samme tall som svar.

2 poeng kandidaten formulerer oppgaven med ord slik at alle elevene vil få samme svar. Kandidaten viser deretter, ved å forenkle det algebraiske uttrykket til et tall, at alle elevene vil få samme svar.
Dette kan gjøres ved at kandidaten presenterer et algebraisk uttrykk som represententer gangen i leken. For at alle skal komme fram til samme tall, må det algebraiske uttrykket være slik at det ved utregning gir en konstant som svar, for eksempel slik:

$$\frac{x \cdot 2 - 4}{2} - x + 12 = 10$$

Alle elevene får svaret 10 dersom tallet de har tenkt på er representert ved x.

1 poeng kandidaten gir en verbal oppgave som vil gi alle elevene samme svar, men algebraisk begrunnelse mangler helt eller delvis.

Oppgave 3

a) Forklar om følgende utsagn er *alltid sant, alltid usant* eller *av og til sant* for ulike valg av hele tall a og b større enn 0.

1. $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$

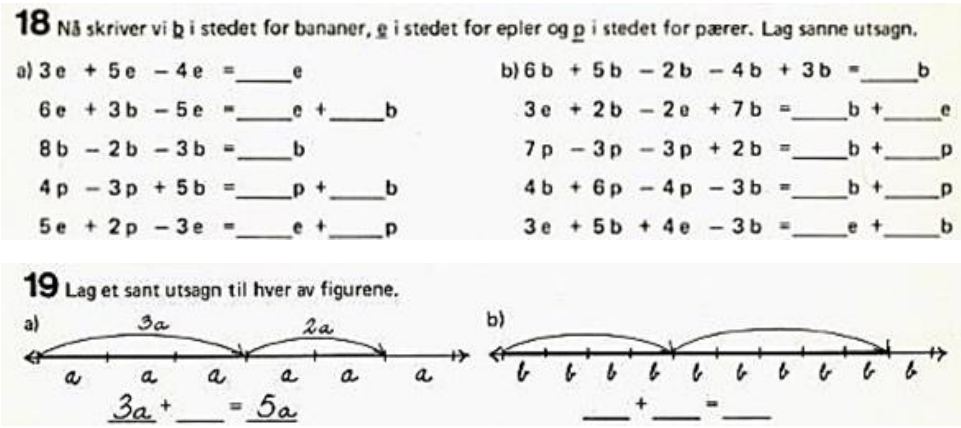
Forklar om følgende utsagn er *alltid sant, alltid usant* eller *av og til sant* for ulike valg av hele tall a større enn 0.

2. Uttrykket $a + (a + 2) + (a + 3)$ har tre ledd som alle er oddetall.

Utsagn 1 er av og til sann fordi vi kan sette inn passende verdier for a, b hvor betingelsen $a = b$ må være oppfylt. Likheten stemmer ikke hvis $a \neq b$.
Utsagn 2 er alltid usann fordi vi kan ikke sette inn passende verdier for a slik at uttrykket a og $a + 3$ er et oddetall samtidig. Dersom a er et oddetall blir automatisk $a + 3$ er partall.

2 poeng for å gi gyldig forklaring til begge utsagnene (å sette inn tallverdier kan være en gyldig forklaring).
1 poeng for å gi gyldig forklaring til ett av utsagnene (å sette inn tallverdier kan være en gyldig forklaring).
0 poeng for svar uten gyldig forklaring.

I en lærebok fra 1975 er følgende to oppgaver gitt:


18 Nå skriver vi b i stedet for bananer, e i stedet for epler og p i stedet for pærer. Lag sanne utsagn.

a) 3 e + 5 e − 4 e = ____ e
6 e + 3 b − 5 e = ____ e + ____ b
8 b − 2 b − 3 b = ____ b
4 p − 3 p + 5 b = ____ p + ____ b
5 e + 2 p − 3 e = ____ e + ____ p

b) 6 b + 5 b − 2 b − 4 b + 3 b = ____ b
3 e + 2 b − 2 e + 7 b = ____ b + ____ e
7 p − 3 p − 3 p + 2 b = ____ b + ____ p
4 b + 6 p − 4 p − 3 b = ____ b + ____ p
3 e + 5 b + 4 e − 3 b = ____ e + ____ b

19 Lag et sant utsagn til hver av figurene.

b) Forklar hvorfor oppgaveteksten i oppgave 18 er uheldig med hensyn på variabelbegrepet.

1 poeng for å forklare at bokstavene blir brukt som forkortninger, enheter eller fysiske objekter.
0 poeng for alt annet

c) Lag en kontekstoppgave som passer til oppgave 19 b) som er egnet til å gi forståelse for variabelbegrepet. Forklar hvorfor b er en variabel i konteksten.

Et eksempel på besvarelse:

$$4b + 5b = 9b$$

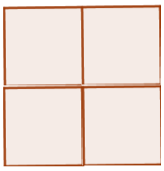
Ola kjøpte 4 kinobilletter, etterpå gikk han og kjøpte 5 kinobilletter til. Hva kostet billettene til sammen?

b er en variabel. Det betyr at vi ikke vet hva en kinobillett koster, men vi vet at alle kinobillettene kostet det samme, men vi vet at Ola kjøpte 9 billetter totalt.

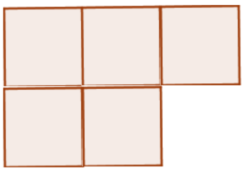
2 poeng for å lage en kontekstoppgave som passer til oppgaven og der variabelbegrepet er brukt korrekt, og forklare hvorfor *b* er en variabel.
1 poeng for å lage en kontekstoppgave som passer til oppgaven og der variabelbegrepet er brukt korrekt.
0 poeng for å lage en kontekstoppgave til oppgaven uten komme inn på variabelbegrepet eller bruke det mangelfullt eller feil.

Oppgave 4

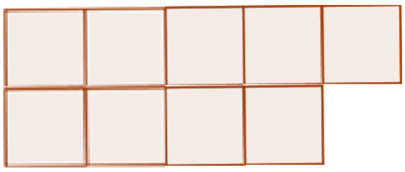
En elev skal vise at summen av et tilfeldig partall og et tilfeldig oddetall alltid er et oddetall. Eleven lager illustrasjon under og skriver $2n + 2n + 1 = 4n + 1 = 2(2n) + 1$.



$2n$



$2n + 1$



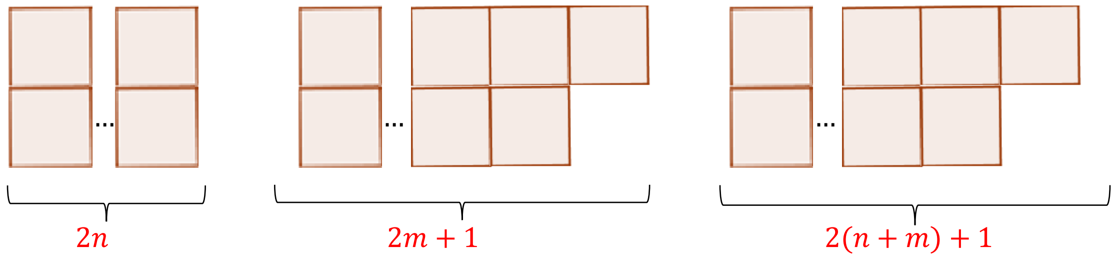
$2(2n) + 1$

Elevens besvarelse er ufullstendig. Forklar og vis hvilken justering som må gjøres i den algebraiske og i den geometriske representasjonen slik at begge representasjonene generaliserer at summen av et tilfeldig partall og et tilfeldig oddetall *alltid* er et oddetall

2 poeng for *både* å justere den geometriske representasjonen til å gjelde summen av et hvilket som helst partall og et hvilket som helst oddetall, *og* for å innføre to ulike variabler i den algebraiske representasjonen.
1 poeng for *enten* å justere den geometriske representasjonen til å gjelde summen av et hvilket som helst partall og et hvilket som helst oddetall, *eller* for å innføre to ulike variabler i den algebraiske representasjonen.
0 poeng for alt annet.

Intensjonen er at kandidaten får frem det generelle ved at representasjonene justeres til å gjelde for summen av et hvilket som helst partall og et hvilket som helst oddetall. For eksempel kan det gjøres som vist nedenfor:

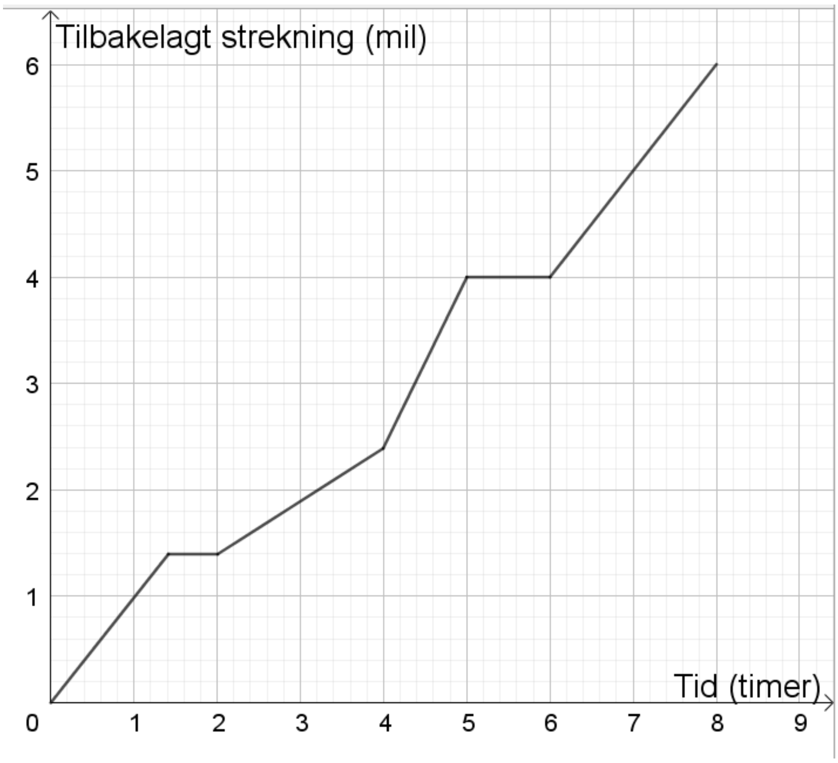
$$2n + 2m + 1 = 2(n + m) + 1$$



...
...
...
$2n$
$2m+1$
$2(n+m)+1$

Oppgave 5

Dag Otto er ute på en rolig sykkeltur, og grafen nedenfor beskriver turen time for time de første åtte timene.



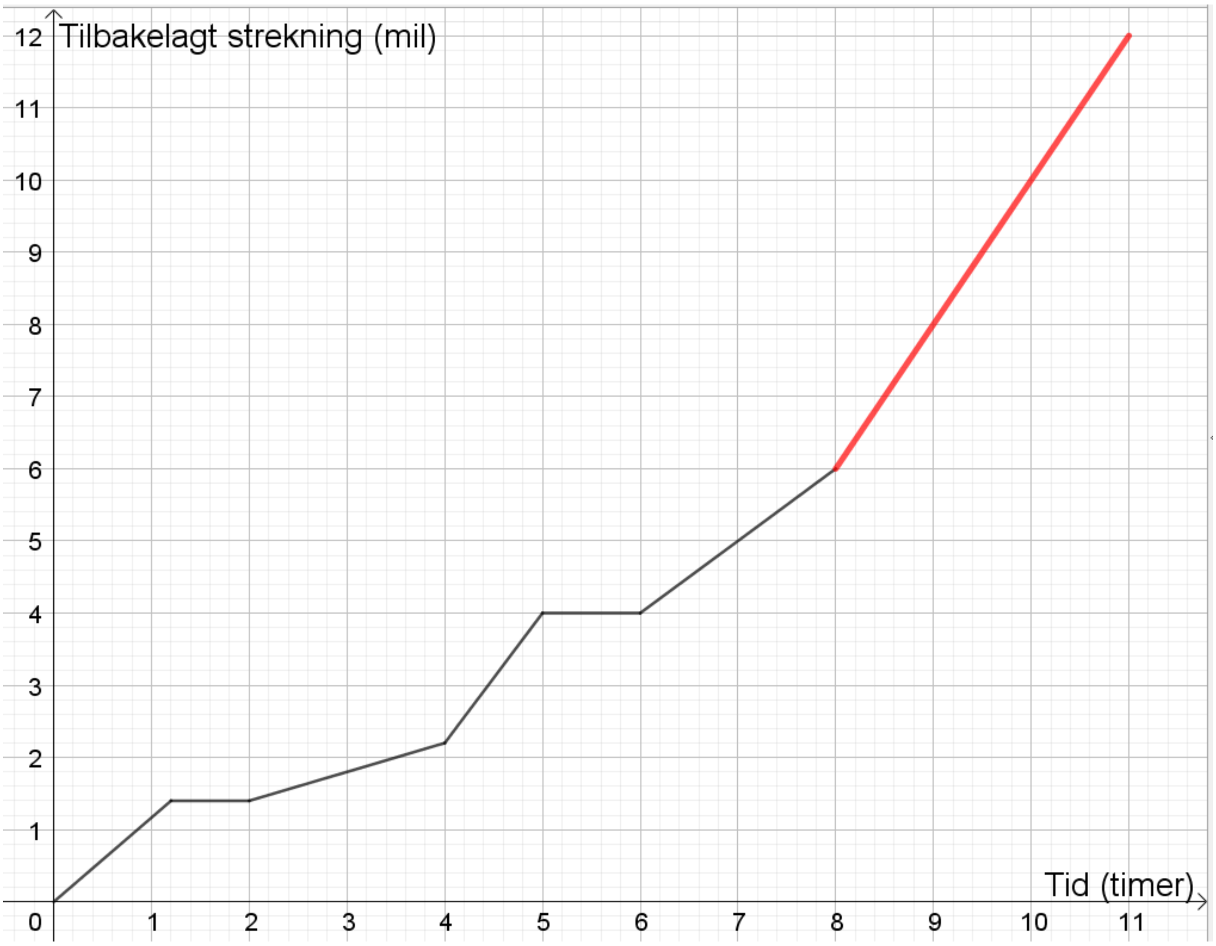
a) Noen elever sier at Dag Otto syklet raskest når han har syklet mellom 1,4 og 2,0 timer fordi grafen er kortest i dette tidsrommet. Vurder gyldigheten av resonnementet til elevene hvor du også gjør rede for det korrekte svaret. Vil det finnes tilfeller hvor et slikt resonnement stemmer? Begrunn.

Elevenes resonnement er ikke gyldig, og det vil ikke finnes tilfeller for fartsgrafer der et slikt resonnement stemmer. Korrekt svar er når Dag Otto har syklet 4. timen (mellom time 4 og 5). Eksempel på forklaring: det vil ikke være slik at vi kun kan studere én av aksenes utstrekning, uten å ta hensyn til den andre aksen, så lenge vi snakker om sammensatte enheter. I dette tilfellet, fart.

2 poeng for vurdering av gyldighet og gyldig redegjørelse for korrekt svar.
1 poeng for å bare avgjøre at resonnementet ikke er gyldig for dette tilfellet og korrekt svar.
0 poeng ellers.

b) Etter den åttende timen sykler Dag Otto samme rute hjem på tre timer. Skisser grafen for hjemturen, og kommenter en misoppfatning som kan avdekkes når elever skisserer grafen for hjemturen.

Grafen kan skisseres slik:



Så lenge grafen stiger til 12 mil fra 8 til 11 timer, anses grafen som korrekt skissert. Det er også greit om kandidaten tegner *kun* fortsettelsen av grafen.

En misoppfatning som kan komme til syne her er at elevene tegner grafen slik at den ender i $y = 0$. Misoppfatninger knyttet til grafer generelt, men ikke denne oppgaven spesielt, gir ikke uttelling.

2 poeng for korrekt skissert graf og kommentar til misoppfatning.
1 poeng for korrekt skissert graf, men med mangelfull eller feil misoppfatning.
0 poeng for galt svar eller kun en av delene som etterspørres.

c) En annen representasjon vi har for funksjoner er *funksjonsuttrykk*. Avgjør og begrunn, uten å tegne grafen, om påstandene under er sanne/usanne for funksjonsuttrykket

$$f(x) = \frac{4}{3}(x + 2)$$

i. Funksjonen f er lineær

ii. Grafen til funksjonen f skjærer y-aksen i punktet $(0, \frac{4}{3})$

iii. Funksjonen f har alltid en positiv funksjonsverdi så lenge $x > 0$

Påstand I) er sann. $a = \frac{4}{3}$ og $b = \frac{8}{3}$. Altså oppfyller $f(x)$ kravet om å skrives på formen $y = ax + b$.
Påstand II) er usann. Riktig skjæringspunkt er $(0, \frac{8}{3})$.
Påstand III) er sann. Ettersom $f(x)$ er positiv så lenge x er større enn -2.

2 poeng for *både* å avgjøre *og* begrunne korrekt for *alle tre påstandene*.
1 poeng for kun å avgjøre korrekt for alle tre påstandene *uten å begrunne*.
0 poeng ellers.

Oppgave 6

En klasse arbeider med hoderegning og følgende oppgave: $12 \cdot 5$

a) En elevs strategi er å regne ut $12 \cdot 5$ som $3 \cdot 20$. Beskriv strategien eleven bruker.

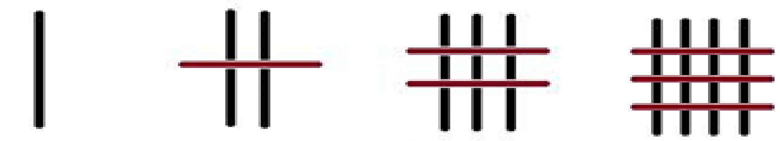
1 poeng for å svare at eleven har brukt en strategi om halvering og dobling, assosiativ lov, eller eventuelt at eleven multipliserer med 4 og dividerer med 4.
0 poeng for å vise at $12 \cdot 5 = 3 \cdot 20$.

b) En annen elevs strategi er å regne ut $12 \cdot 5$ som $10 \cdot 5 + 2 \cdot 5$. Ved hjelp av en illustrasjon, gi en begrunnelse for at det *alltid er gyldig* å koble sammen multiplikasjon og addisjon av naturlige tall, slik eleven her har gjort.

2 poeng for å vise illustrasjon og gi en generell begrunnelse for regnestrategien som forklarer den distributive egenskap. Kandidaten trenger ikke bruke begrepet distributivitet for full uttelling.
1 poeng for å vise illustrasjon til et eller flere konkrete eksempler.
0 poeng for å vise at regnestykket stemmer.

Oppgave 7

Nedenfor ser du de fire første figurene i et voksende figurmønster:



Figur 1 Figur 2 Figur 3 Figur 4

a) Beskriv utviklingen fra Figur 3 til Figur 5.

1 poeng for å klare og beskrive utviklingen mellom Figur 3 og Figur 5.
0 poeng for kun å tegne opp figur 5.

b) Forklar den generelle sammenhengen mellom figurnummeret og totalt antall streker i figuren slik du kunne ha gjort for en elev. Bestem den generelle formelen for hvor mange streker det vil være i Figur n.

Eksempel på forklaring av sammenheng mellom figurnummer og totalt antall streker: Det vil være like mange vertikale streker som i figurnummeret, og én færre horisontal strek enn figurnummeret.

Eksempel på eksplisitt formel: $F(n) = n + (n - 1)$ (det er ikke avgjørende om man bruker $F(n)$, F_n eller $Totalt\ antall\ streker$).

Det vil være flere mulige gyldige forklaringer og formler, og det gis poeng dersom det er korrekt.

2 poeng for å både gi korrekt forklaring for sammenhengen mellom figurnummeret *og* det totale antall streker i figuren, og å gi en korrekt formel for antall streker i figur n.
1 poeng for å gi korrekt forklaring for sammenhengen mellom figurnummeret og det totale antall streker *eller* å gi en korrekt formel.
0 poeng ellers.

c) Hvor mange horisontale og vertikale streker vil Figur 99 ha?
1 poeng for korrekt svar, 98 horisontale og 99 vertikale streker.
0 poeng ellers.

d) Noen foreldre er skeptisk til arbeid med figurtall slik som figurene ovenfor. De mener figurtall ikke er relevant innenfor matematikken. Gi to argumenter for hvorfor slike oppgaver innebærer algebraisk tenkning.
Eksempler på argumenter som er relevante her kan være:

I arbeid med figurtall arbeider man med å oppdage struktur og mønster, og å si noe generelt om mønstrenes utvikling, som er sentralt i arbeid med algebraisk tenkning.

I arbeid med figurtall finner man sammenhengen mellom figurnummeret og figurtallet, og finner på denne måten en relasjon mellom to mengder tall, og arbeid med figurtall er derfor en måte å arbeide med funksjonstenkning på.

I arbeid med figurtall jobber man med variasjon og samvariasjon (f.eks. at ved å variere figurnummeret, samvarierer figurtallet), som er et sentralt aspekt innen algebraisk tenkning.

2 poeng for å gi to relevante argumenter.
1 poeng for kun å gi ett argument.
0 poeng for å ikke gi noen argumenter.

Oppgave 8

Følgende oppgave er en del av digitale ressurser for 6.trinn i et norsk læreverk:

Hvor mye lengre hoppet Somaya i det andre hoppet?
Skriv formelen du må bruke for å finne svaret i regnearket.

	A	B	C	D
1	Navn	Hopp 1 (m)	Hopp 2 (m)	Differanse (m)
2	Somaya	1,2	3,0	
3	Brage	2,7	3,9	
4	Aima	1,3	3,5	
5	Emma	1,7	3,2	
6	Even	2,3	3,1	

a) Redegjør for hvilke aspekter ved algebraisk tenking som kan fremmes under arbeid med regneark i oppgaven over.

Et eksempel på besvarelse kan være å trekke frem at regneark kan fremme behovet for å lage formler, fordi formlene som lages kan kopieres. I regneark brukes formler der variabler inngår. I oppgaven over vil det si å lage en formel for differansen mellom det andre og det første hoppet, slik at man finner differansen mellom alle elevene sitt andre og første hopp, der lengden på hoppene er variablene som inngår i formelen.

2 poeng for å redegjøre for hvorfor oppgaven fremmer algebra som formler, bruk av variabler og symboler.
1 poeng for ikke å redegjøre, men kun å nevne algebra som formler og bruk av symboler uten redegjørelse.
0 poeng ellers.

b) Skisser et ekstraspørsmål som kan utvide oppgaven videre i retning av algebraisk tenking.

Hensiktsmessige spørsmål burde ta utgangspunkt i å si noe mer generelt enn bare hva differansen mellom Somayas andre og første hopp er. Et eksempel kan være «Lag et regneark som vi kan bruke underveis i hoppinga, som er slik at vi kan fylle inn lengden på hvert av hoppene, og så får vi automatisk vite hvor mye lenger det andre hoppet er enn det første.»

1 poeng for et hensiktsmessig spørsmål.
0 poeng ellers.