SENSORVEILEDNING

Emnekode:	**LSV3MAT12 V3**
Emnenavn:	**Matematikk 2, 5-10 KFK**
Eksamensform:	**Skriftlig**
Dato:	**13/12/2018**
Faglærer(e):	**Russell Hatami** **Khaled Jemai**

1) **Eventuelt: Eksamensoppgaven med løsningsforslag side 2 til 18. Den inneholder fasit og forslag eller kommentarer til ulike fremgangsmåter.**

   Generelt skal kandidatene begrunne alle sine svar.

   Det er viktig at kandidatene får frem sin forståelse fremfor om alle punktene er med.

2) **Vurderingskriterier er på sider 19 og 20.**

Oppgave 1 (34%)

a) Hvilke av sammenhengene nedenfor er riktige? Begrunn. (3%)

I. $\mathbf{12 \equiv 3 (\mathit{mod}\ 8)}$ II. $\mathbf{21 \equiv 0 (\mathit{mod}\ 7)}$ III. $\mathbf{16 \equiv 4 (\mathit{mod}\ 6)}$

I. Ikke riktigt. Eftersom 12 har resten 4 vid division med 8 medan 3 har resten 3.
II. Riktigt. Eftersom 21 liksom null är delelig med 7.
III. Riktigt. Eftersom både 16 och 4 har samma rest vid division med 6. Resten är 4.

b) Finn SFF av tallene 1230 og 420. (3%)

Lösningsförslag, metod 1:

$$1230 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 41$$
$$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Alltså får vi

$$SFF = 2 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{30}.$$

Lösningsförslag, metod 2:Bruke Euklides algoritme med två olika uppställningar:

2.1

kvot	2	1	13
1230	420	390	**30**
−840	−390	−390	
390	30	0	

2.2

$$1230 = 2 \cdot 420 + 390$$

$$420 = 1 \cdot 390 + 30$$

$$390 = 13 \cdot \mathbf{30} + 0$$

c) Bruk primtallsfaktorisering til å bestemme om 2025 er delelig med 35 eller/og 42. (3%)

$35 = 5 \cdot 7 \quad og \quad 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ samt $2025 = 5^2 \cdot 3^4$

$$\begin{array}{r|l} 2025 & 5 \\ 405 & 5 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Talet **2025** har inte faktor 7. Alltså är ikke delbart med 35 och 42 som båda har faktor 7.

d) Hva er koeffisienten? Gi begrunnelse. (3%)

a er koefficient i ax^n

I. $-3x^2$

$$\boldsymbol{-3x^2}. \qquad a = -3$$

II. $\frac{x}{-3}$

$$\frac{x}{-3} = -\frac{x}{3} = -\frac{1}{3}x. \qquad a = -\frac{1}{3}$$

III. $\frac{5x}{3}$

$$\frac{5x}{3} = \frac{5}{3}x. \qquad a = \frac{5}{3}$$

e) Bestem summen av følgende aritmetiske serie (tallfølge). (3%)

$$\mathbf{2}, \quad \mathbf{5}, \quad \mathbf{8}, \quad \mathbf{11}, \dots, \quad \mathbf{149}.$$

$$5 - 2 = 8 - 5 = 11 - 8 = \cdots = 3.$$

Metod 1:

5 er andra led ($5 = 2 + 1 \cdot 3$). 8 som er tredje led er lika med $2 + 2 \cdot 3$. Alltså led nummer $\boldsymbol{n}$ er lika med $2 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 1$. Vår sista led ær 149.

$$\begin{aligned} 3n - 1 &= 149 \\ 3n &= 150 \\ n &= 50 \end{aligned}$$

Detta innebär att vi ska bestämm summan av 50 led i ovanstående talserie. Alltså Summan $=$ $(2 + 149) \cdot \frac{50}{2} = \frac{151 \cdot 50}{2} = 151 \cdot 25 =$3775.

f) Løs de følgende ligningene.

I. $\frac{x+3}{2x^2-7x} - \frac{8}{10x-35} = 0$ (2%)

$$\boldsymbol{\frac{x+3}{2x^2-7x} - \frac{8}{10x-35} = 0}$$
$$\frac{x+3}{x(2x-7)} - \frac{8}{5(2x-7)} = 0$$

$MFN = 5x(2x-7). OBS!\ \ x \neq 0\ og\ x \neq 3{,}5.$

$$5x + 15 - 8x = 0$$

$$3x = 15. \quad \boldsymbol{svar}: \boldsymbol{x = 5}.$$

II. $3x^2 + 7x - 6 = 0$ (1%)

$$\boldsymbol{3x^2 + 7x - 6 = 0.}$$
$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49+72}}{6} = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{6}.$$
$$x_1 = \frac{-7+11}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}\ \ og\ \ x_2 = \frac{-7-11}{6} = -\frac{18}{6} = -3.$$

g) En butikk gir en T–skjorte til hver 25. kunde og en penn til hver 20. kunde for reklameformål. Hvilket nummer blir den første kunden å få både en T-skjorte og en penn? (3%)

Vi behöver bestämma $MFM(20, 25)$. Eftersom minsta felles multipel är det första talet som är både delbart med 20 och också med 25, därmed är den hundrade kunden som får både T-skjorte og penn.

$$20 = 2^2 \cdot 5 \text{ och } 25 = 5^2.\ MFM(20,25) = 2^2 \cdot 5^2.$$

h) Bevis at summen av to påfølgende potenser av 4 alltid er delelig med 5. (3%)

I. **En metode:** Vi begynner med å skrive opp noen eksempler:

$$4^0 + 4^1 = 1 + 4 = 5.$$

$$4^1 + 4^2 = 4 + 16 = 20.$$

$$4^2 + 4^3 = 16 + 64 = 80.$$

Vi prøver oss med noen høyere potenser:

$$4^5 + 4^6 = 1024 + 4096 = 5120.$$

I hvert tilfelle legger vi merke til at firepotensene som adderes sifrene 1 og 4 på enerplassene. Summen av to slike tall må være i femgangen. Hvis vi kan bevise at dette er tilfellet for *ethvert* par av påfølgende potenser av 4, vil vi ha løst oppgaven. Hovdan kan vi gjøre dette?

For å komme fra en potens av 4 til den neste, multipliserer vi med 4. Generelt, siden $4 \cdot 4 = 16$, er det slik at hvis vi multipliserer 4 med et tall som har en 4 på enerplassen, får vi et tall med 1 på enerplassen. (Hvis ikke du ser dette med en gang, er det en fin oppgave å kontrollere det!) Videre, hvis vi multipliserer 4 med et tall med 1 på enerplassen, får viet tall med 9 på enerplassen. Dermed er oppgaven løst!

II. **En annen metode:** Det som også kommer fram av eksemplene over, er et mønster blant de tier multiplene som oppstår i summene. Fra eksemplene ser det ut til at *summen av to påfølgende potenser av 4, er 5 ganger den minste av potensene*. La oss se om dette stemmer

$$4^n + 4^{n+1} = 4^n + 4 \cdot 4^n = 4^n(1+4) = 4^n \cdot 5$$

Det var nettopp dette vi skulle vise!

III. **Refleksjons kommentar:** Altså generelt *kan* vi påstå at: om t er en symbolikk representant for ett heltall har vi f.eks.

$$t^n + t^{n+1} = t^n + t \cdot t^n = t^n(1+t).$$

i) Gi en forklaring/begrunnelse på at produktet av to negative tall er et positivt tall.

(3%)

Anvændningen av symbolen noll skapade nya møjligheter. ***T.ex. noll som***

i. avskanad av en position t.ex. i 305,
ii. løsning till en ekvation
iii. ett resultat av aritmetiska operationer,
iv. neutralt elemen i talsystemet, dær $a + 0 = a$.
v. (algebraiska) summan av motsatta tal, $a + (-a) = 0$.

Den femte egenskapen ihop med kommutativa och associativa lagen kan vara grund før svaret till oppgven.

En av två följande metoder ger full poäng

Metod 1: Talexempel

I. $-3 \cdot 5 = 5.(-3)$ enligt kommutativa lagen før multiplikation.

$$5.(-3) = -3 + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -15.$$

Alltså produkten av ett negativt tal med ett positivt tal er alltid negtivt tal.[1]

II. Vi vet att $3 + (-3) = 0$. Om vi multiplicerar båda sidorna med ett tal liksom (– 5) gæller likheten med noll fortfarande:

$$(-5) \cdot 3 + (-5)(-3) = 0.$$
$$-15 + (-5)(-3) = 0.$$

III. Vi vet att $-15 + (+15) = 0$. Alltså måste $(-5)(-3) = 15$. Dvs. Vi har visat att prudukten av två godtyckliga negativa tal som (-5) og (-3) ær positivtm15. Før att visa detta formelt anvænder vi oss av metod 2.

Metod 2: Vælj godtyckliga positiba talet *a* och dess mottsatt $(-a)$. Så har vi

$$a + (-a) = 0.$$

Multiplicera alla led med negativa talet $(-b)$, så får vi

$$-ba + (-b)(-a) = 0.$$

Alltså nær – ab ær negativt så måste $(-b)(-a)$ vara positivt. **Vilket skulle førklaras!**

j) Johanna hevdet at hvis vi vet at summen av de første 50 partallene er 2550, må summen av de første 50 oddetallene være 50 enheter mindre; dvs. 2500. Er du enig med Johanna? Resonere for svaret ditt uten å bestemme summen av de første 50 oddetallene. (3%)

Ja, instämme rmed Johanna. Eftersom varje av de förste 50 partallene är en enhet större är föregående oddetallene.[2]

[1] Eftersom ingår enbaart reella tal i grundskolan, anvænder vi, nær det inte ær nødvændigt, enbart tal istællet før reella tal.

[2] De første 50 partallene er 2, 4, 6, …, 98, 100. De første 50 oddetallene er 1, 3, 5, …, 97, 99.

k) **Divisjonsalgoritmen består av fem deler verden over. Men i de ulike språkene (fra ulike land), brukes ulike måter å stille opp på. De ulike oppstillingsmåtene kan fordeles på fire ulike hovedmåter; Celsius (den norske varianten), Italiensk, Trappen og Liggende stolen.**

I. **Divider 42224 med 21 med den fullstendige oppstillingen som du har lært. Svarte med to desimaler.** (2%)

$$4\ 2\ 2\ 2\ 4,0\ 0\ 0 : 21 = 2\ 0\ 1\ 0,666$$

Divisor

$-\ 4\ 2$

$0\ 0\ 2$

$-\ 0$

$2\ 2$

$-\ 2\ 1$

$1\ 4$

$-\ 0$

Operasjoner

$1\ 4\ 0$ ***Heltalsrest = 14***

$-1\ 2,6$

$1,4\ 0$

$-\ 1,2\ 6$

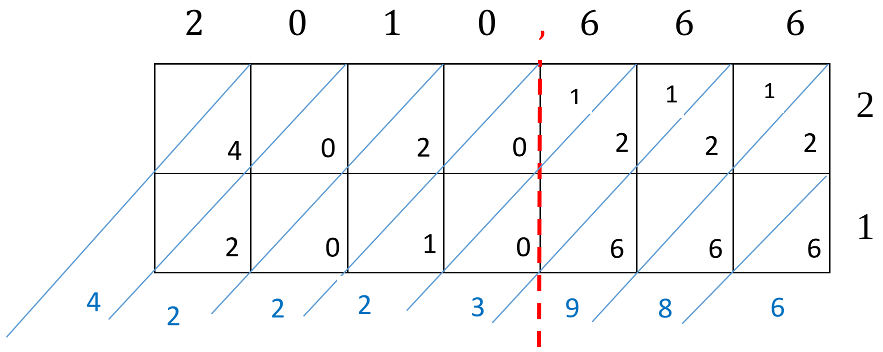
$0,1\ 4\ 0$

$-\ 0,1\ 2\ 6$

$0,0\ 1\ 4$ **Rest = 0, 014**

<u>**Svar:2010,67.**</u>

II. **Vis/kontroller ved hjelp av multiplikasjon at din divisjon ble utført korrekt. Anvend Kashis metode her.** (1%)



$$2010{,}666 \cdot 21 = 42223{,}986$$

$42223{,}986 + 0{,}014 = 4224$; vilket är dividend. **Alltså korrekt**!

Oppgave 2

a) Regn ut og forenkle uttrykkene mest mulig (8%)

I. $-\frac{2a}{a^2-4} + \frac{2}{a-2} + \frac{1}{0{,}5a+1}$

$$-\frac{2a}{a^2-4} + \frac{2}{a-2} + \frac{2}{a+2}$$

$MFN = 15ab$

$$-\frac{2a}{(a-2)(a+2)} + \frac{2}{(a-2)} + \frac{2}{(a+2)}$$

$$= \frac{-2a + 2(a+2) + 2(a-2)}{(a-2)(a+2)}$$

$$= \frac{-2a + 2(a+2+a-2)}{(a-2)(a+2)}$$

$$= \frac{-2a + 4a}{(a-2)(a+2)}$$

$$\boldsymbol{Svar}: \frac{2a}{(a-2)(a+2)}.$$

II. $12 - 5 \cdot 2 + \frac{8 \cdot 87 + 13 \cdot 8}{32} + \frac{\frac{54}{5}}{\frac{27}{25}}$

$$= 12 - 10 + \frac{87 \cdot 8 + 13 \cdot 8}{32} + \frac{54 \cdot 25}{5 \cdot 27}$$

$$= 2 + \frac{(87+13) \cdot \cancel{8}}{4 \cdot \cancel{8}} + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 1}$$

$$= 2 + \frac{100}{4} + 10$$

$$= 2 + 25 + 10 = 37.$$ **Svar: 37.**

III. $\mathbf{3\sqrt{50} - 2\sqrt{32} + \sqrt{8} - \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}}}$

$$= 3 \cdot 5\sqrt{2} - 2 \cdot 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{\frac{54}{3}}$$
$$= 9\sqrt{2} - \sqrt{18}$$
$$= 9\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \mathbf{6\sqrt{2}}\,.$$

IV. $\mathbf{\frac{14}{40} - \frac{7}{30} + \frac{4}{42}}$ **(her bør du bruke MFM)**

$$40 = 2^3 \cdot 5, \qquad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \; och \; 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7.$$
$$MFN(40, 30, 42) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840 = 21 \cdot 40 = 28 \cdot 30 = 20 \cdot 42$$
$$\frac{21 \cdot 14}{21 \cdot 40} - \frac{28 \cdot 7}{28 \cdot 30} + \frac{20 \cdot 4}{20 \cdot 42} = \cdots = \frac{178}{840} = \frac{89}{420}.$$

89 Är primtal och $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ och saknar 89. Altså er $\frac{89}{210}$ i enkleste form.

Svar: $\frac{89}{210}$.

b) Henrik skal lage en innhegning for jordbærplantene sine ved å gjerde inn et rektangelformet jordstykke. Henrik har fått tak i 32 meter gjerde. Henrik vil at jordbærlandet skal være så stort som mulig. Nilofar, Henriks datter, er veldig interessert i matematikk og hjelper pappa Henrik til å gjøre det største mulige jordbærlandet. Hvilket mål har det største jordbærlandet? Løs oppgaven på fire forskjellige metoder som følger: (8%)

I. **Bruk tabell.**
II. **Bruk konjugatsetningen**
III. **Bruk grafisk løsning**
IV. **Bruk derivasjon**

I. *Metod 1, tabell som en representationsform*

$$\frac{Rektangelns\ omkrets}{2} = summan\ av\ dess\ två\ sidor = \frac{32}{2} = 16$$

Summan av sidorna $(a+b)$ *cm*	*sidan 1* s_1 eller *a* *cm*	*sidan 2* s_2 eller *b* *cm*	$a \cdot b$ *kv cm*
16	1	(16 – 1) =15	15
16	2	(16 – 2) =14	28
16	3	(16 – 3) =13	39
16	4	(16 – 4)=12	48
16	5	(16 – 2) =14	28
16	6	(16 – 3) =13	39
16	7	(16– 7) = 9	63
16	8	(16 – 8) = 8	64
16	9	(16 – 9) = 7	63
	. . .	. . .	. . .
	15	(16 – 15) = 1	15

II. *Metod 2, konjugatregel som en symbolisk representationsform (en matematisk modell)* [3]

I tabellen här ovan upptäcker ett mönster, sådana att efter 8 upprepas längder på sidorna som de första åtta fallen.

Alltså, om en sida $(8-s)$, så måste den andra vara $(8+s)$. Arean är lika med $(8-s)(8+s)$. det vill säga arean i kvadratcentimeter är lika med

Med hjälp av bokföringen i tabellen kan vi nu sätta igång den symboliska lösningsresonemanget, vilket vanligen möter gymnasieelever i senare åren på gymnasialnivå eller under det första universitetsåret.

Vi har nu förstått att arean är lika med $(64-s^2)$. Rent räknemässigt kan vi hävda att eftersom $0 \leq s < 16$ så är ovanstående differns alltid positivit. Med andra ord: $(64-s^2) > 0$.

Här kan vi resonera för maximala optimering av arean som är räknemässigt för vilka värden efternoll noll fram till strax innan 16, ger differensen maximal resultat. Jo, då $s=0$, när sidan är lika med *8 cm*.

III. Grafisk lösning

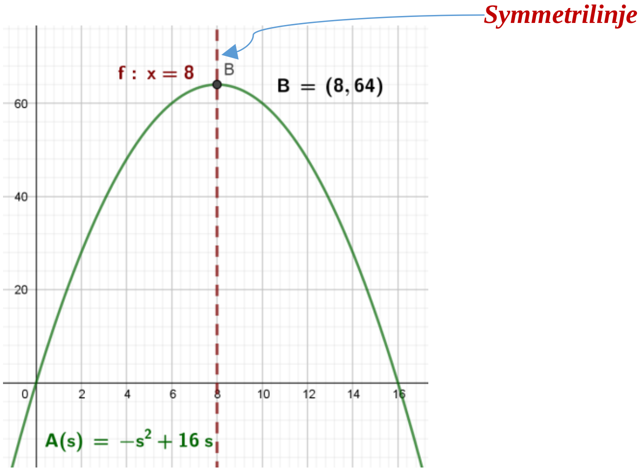
Studenten kan använda sig av $f(s) = s(16-s) = 16s - s^2$ eller $f(s) = 64 - s^2$.

Med hjälp av grafisk lösning kan vi se att arean blir mindre när sidornas skillnad ökar. Eftersom funktionens graf är symmetrisk kring maximivärdet är arean och på ena hållet avtagande och från andra hållet om maximivärdet växande.

Vid *s = 8* är symmetrilinjen. För *s = 8* får vi max area – värdet.

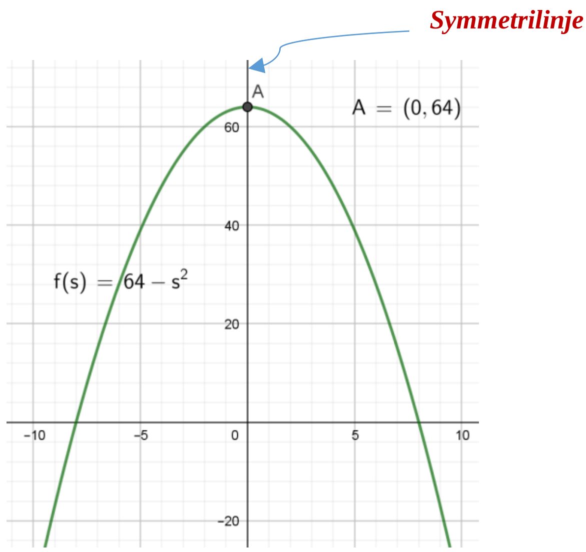
Alternativ 1, $f(s) = 16s - s^2$

$$y = A(8) = 8(16-8) = 64.$$



[3] För studentlösning på skriftlig eksaminasjon räcker det med tabellen. Dessa didaktiska förklaringar vid skriftlig eksamination är väldigt tidskrävande ...

Alternativ 2, $f(s) = 64 - s^2$. Vid $s = 0$ är symmetrilinjen. För $s = 0$ får vi max area – värdet.



Alternatvi 1, $A(s) = s(16 - s) = 16s - s^2$.

Max punkten för denna funktion ges av derivatans nollställ. Alltså

$$A'(s) = 16 - 2s.$$

$$A'(s) = 0, \text{ger } s = 8.$$

$$A(8) = 8(16 - 8) = 64.$$

Svar: maximala arean(64 m^2) fås när vi har en kvadrat med 8m per sida.

Alternatvi 2, $A(s) = 64 - s^2$.

Max punkten för denna funktion ges av derivatans nollställ. Alltså

$$A'(s) = -2s.$$

$$A'(s) = 0, \text{ger } s = 0.$$

$$A(0) = 64 - 0 = 64.$$

Svar: maximala arean er (64 m^2).

Oppgave 3 (25%)

a)

I. **Vis at $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$ (1%)**

II. **Finn grenseverdien $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1}$ (2%)**

Løsningen

I. **skal kandidaten bruke a, b, c formelen og så faktorisere**

$$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$$

det er også mulig å sjekke $(x-1)(x+3) = x^2 + 2x - 3$

II. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1} = x + 3 = 4$

b)

Gitt funksjonen $f(x) = \frac{3x-2}{2x+1}$

I. Hva er definisjonsmengden til f? (1%)

II. Finn vertikale og horisontale asymptoter til funksjonen. (2%)

Løsningen:

I. $D_f = \mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{1}{2}\right\}$**, vi har bruddpunkt når $x = -\frac{1}{2}$**

II. **Vi undersøker vertikal asymptote ved bruddpunkt $-\frac{1}{2}$**

$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} \frac{3x-2}{2x+1} = -\infty$ **og** $\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-} \frac{3x-2}{2x+1} = +\infty$

Så $x = -\frac{1}{2}$ er vertikal asymptote

For å finne horisontal asymptote vi lar

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x-2}{2x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2} = \lim_{x\to -\infty} f(x)$**, så er $y = \frac{3}{2}$ er horisontal asymptote.**

c) Bruk definisjonen til den deriverte for å derivere følgende funksjoner:

I. $f(x) = 3x + 1$ (2%)

II. $g(x) = x^2 - 4x$ (2%)

Løsningen

I. $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{3(x+\Delta x)+1-(3x+1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{3x+3\Delta x+1-3x-1}{\Delta x} =$

$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{3\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = 3$

II. $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-4(x+\Delta x)-x^2+4x}{\Delta x}=$
$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-4x-4\Delta x-x^2+4x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2+2x\Delta x-4\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}(\Delta x+2x-4)}{\cancel{\Delta x}}=$
$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x+2x-4=2x-4$

d)

Bruk derivasjonsregler for å finne den deriverte til følgende funksjoner:

I. $f(x)=x^4+\frac{1}{2}x^2$ **(1%)**

II. $g(x)=\frac{x^2-1}{x+3}$ **(2%)**

III. $h(x)=(x+1)\sqrt{x}$ **(2%)**

Løsningen:

i. $f'(x)=4x^3+x$

ii. $g'(x)=\frac{2x(x+3)-1(x^2-1)}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x+1}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x+1}{x^2+6x+9}$

III. $h'(x)=1\cdot\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)=\frac{3x+1}{2\sqrt{x}}$

e)

En modell for avkjøling av ei flaske er gitt ved følgende funksjon:

$f(t)=0,06t^2-3,5t+50 \qquad D_f=[0,20]$

Her står $f(t)$ for temperaturen i ^0C til saften etter t minutter.

I. Regn ut $f(0)$ og $f(20)$. Hva forteller svarene? **(2%)**

II. Bruk modellen til å regne den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet $[0,20]$. Hva forteller svaret? **(2%)**

III. Finn $f'(t)$ og finn vekstfarten til f når $t=8$. **(2%)**

Løsningen

I. $f(0)=0,06\cdot 0^2-3,5\cdot 0+50=50$, $f(20)=0,06\cdot 20^2-3,5\cdot 20+50=4$, Svarene forteller temperaturen i starten og etter 20 minutter

II. $\frac{f(20)-0}{20-0}=\frac{4-50}{20}=\frac{-46}{20}=-2,3$. Dette temperaturen synker gjennomsnittlig med $-2,3^0C$ per minutt

III. $f'(t)=0,12t-3,5$ og momentan vekstfart når $x=8$ er gitt ved $f'(8)=0,12\cdot 8-3,5\approx -2.54$

f)

Finn de ubestemte integralene

I. $\int (x^2 - 5x + 6)dx$ **(2%)**

II. $\int \left(x + \frac{1}{x^2}\right) dx$ **(2%)**

Løsningen

$$\text{I. } \int (x^2 - 5x + 6)dx = \frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 6x + C$$

$$\text{II. } \int \left(x + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int x + x^{-2} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + C$$

Oppgave 4 (25%)

$$f(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2x - 4$$

a) Vis at 1 er et nullpunkt til f? **(1%)**

Løsningen: $f(1) == -2 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 4 = 0$**, så 1 er nullpunkt til** f

b) Utfør polynomdivisjon: $f(x) : (x - 1)$. **(2%)**

Løsningen

$f(x) : (x - 1) =$

$-2x^3 + 4x^2 + 2x - 4 : x - 1 \ = -2x^2 + 2x + 4$

$-$

$\underline{-2x^3 - 2x^2}$

$= 0 + \ 2x^2 + 2x - 4$

$-$

$\underline{2x^2 - 2x}$

$= \quad 0 + \quad 4x - 4$

$-$

$\underline{4x - 4}$

$0 \ + 0$

$$-2x^3 + 4x^2 + 2x - 4 : x - 1 \ = -2x^2 + 2x + 4$$

c) Faktoriser $f(x)$ til lineære faktorer og finn de andre to nullpunkter. **(2%)**

Løsningen:

$$-2x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = (-2x^2 + 2x + 4)(x - 1)$$

Ved bruk av a, b, c formelen kan vi finn nullpunkter til $-2x^2 + 2x + 4$, $x_1 = -1$eller $x_2 = 2$.

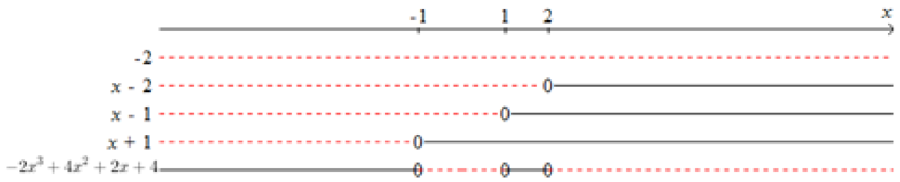
$$-2x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = -2(x - 1)(x + 1)(x - 2)$$

d) Løs ulikheten $f(x) \leq 0$. (3%)

Løsningen:

For å løse $f(x) \leq 0$, lager vi følgende fortegnslinja:

Fra fortegnslinja, kan vi konkludere at $f(x) \leq 0$ når $-1 \leq x \leq 1$ og når $x \geq 2$



e) Finn ekstremalpunkteter til grafen f ved å bruke derivasjon. Bruk fortegnslinje til å avgjøre om det er topp- eller bunnpunkt. (3%)

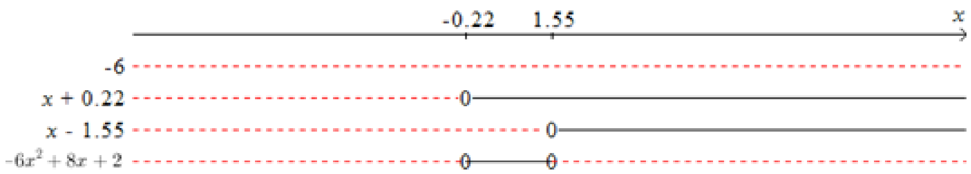
Løsningen:

$$f'(x) = -6x^2 + 8x + 2$$

Ekstremalpunkter er når $f'(x) = 0$

Ved bruk av a, b, c formelen finner vi nullpunkter til f er $x_1 = -0,22$ og $x_1 = 1,55$.

Vi trenger å lage fortegnlinja til f for å avgjøre hvilken av de to punktene er topp- eller bunnpunkt.



Fortegnslinja viser at f har bunnpunkt ved punktet $B = \left(-0,22, f(-0,22)\right) = (-0,22, -4,23)$ og toppunkt ved punktet $A = \left(1,55, f(1,55)\right) = (1,55, 1.26)$

f) Drøft krumningsforholdene til f og regn ut eventuelle vendepunkter. (3%)

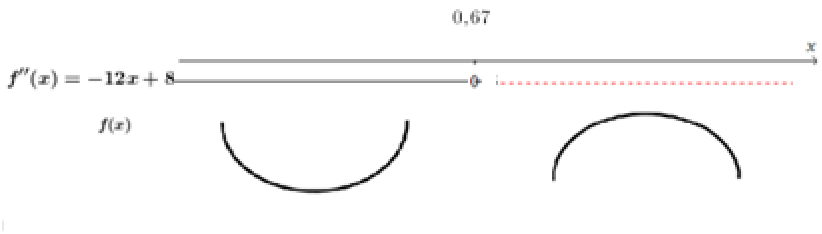
Løsningen:

vi drøfter krumningsforholdene ved å undersøke $f''(x)$.

$$f''(x) = -12x + 8$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -12x + 8 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{8}{-12} = \frac{2}{3} \approx 0,67$$

Vi lager fortegnslinja for $f''(x)$ og krumningsforholdene som følger:



$f''(x) > 0$ i $(-\infty, 0,67) \Longrightarrow f$ vender den hulesiden opp.

$f''(x) < 0$ i $(0,67, +\infty) \Longrightarrow f$ vender den hulesiden ned.

C $= \big(0,67, f(0,67)\big) = (0,67, -1.48)$ er et vendepunkt.

g) Finn likningen til vendetangenten til f. (2%)

Løsningen:

Vi bruker ettpunktformelen for å finne tangenten i $x = 0,67$

$$a = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Der $x_1 = 0$, $y_1 = f(x_1) = f(0,67) = -1,47$ og $a = f'(x_1) = f'(0,67) = 4,67$

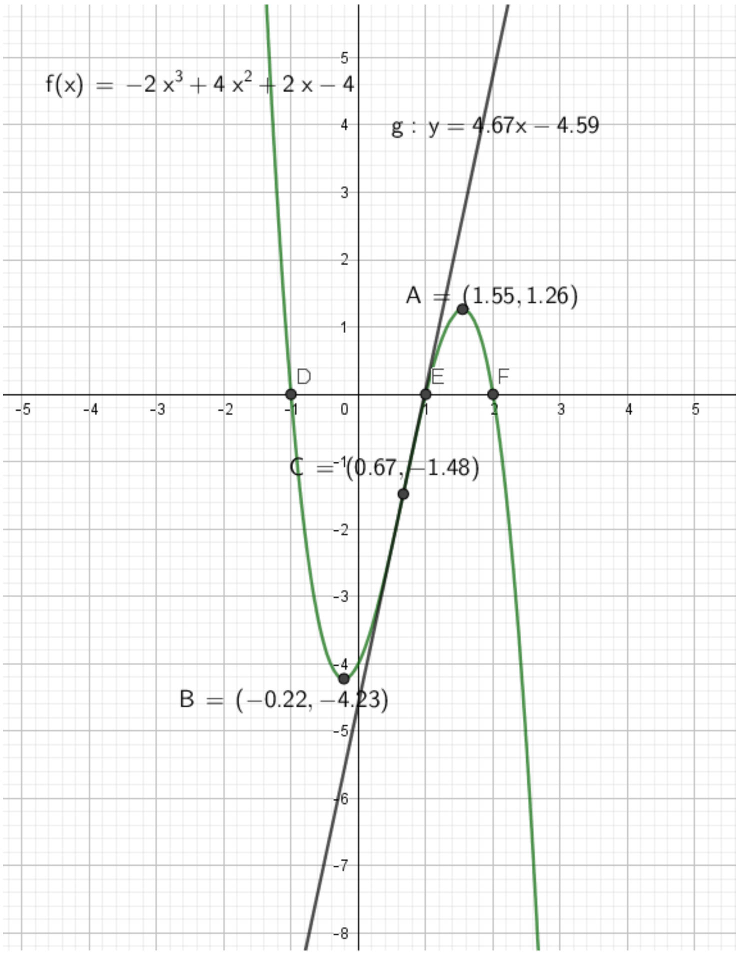
$$a = \frac{y - y_1}{x - x_1} = -4,67 = \frac{y + 1,47}{x - 0,67} \Longrightarrow y = 4,67x - 4,59$$

h) Tegn grafen til f. (2%)

Løsningen:

Det er viktig at kandidaten tegner nullpunkter, ekstremal punkter, vendepunkt og vendetangent

Grafen er som følgende:



i) Finn $\int_{-1}^{2} f(x)dx$. **(2%)**

Løsningen:

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = [-2\frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 4x]_{-1}^{2} \approx -4,5$$

j) Finn arealet som er avgrenset av x −aksen og grafen til f. **(3%)**

Løsningen:

Funksjonen $f < 0$ i intervallet $[-1, 1]$ og $f > 0$ i intervallet $[1, 2]$.

Vi finner $\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx$

Siden $f < 0$ i intervallet $[-1, 1] \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)dx = -5,3 < 0 \Rightarrow$

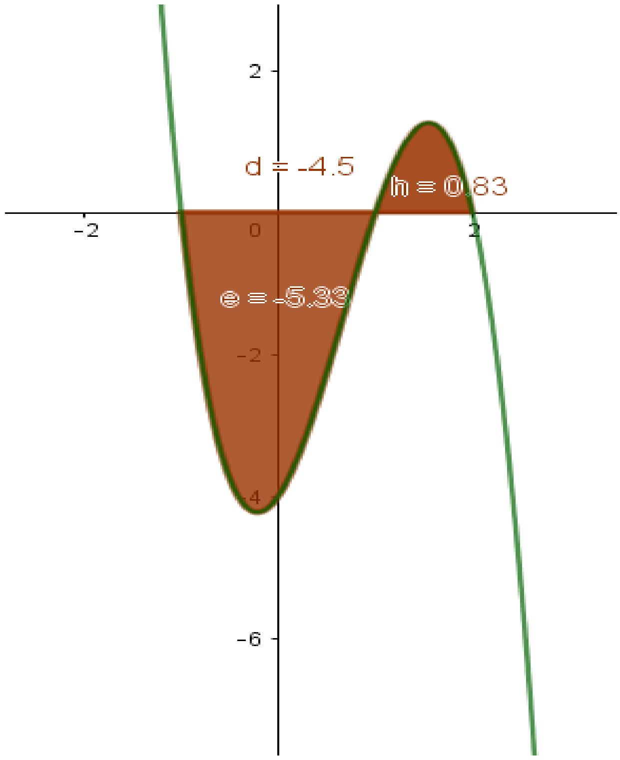
$$A_1 = -\int_{-1}^{1} f(x)dx = 5,3$$

og $f > 0$ i intervallet $[1, 2] \Rightarrow \int_{1}^{2} f(x)dx = 0,83$ og arealet som er avgrenset av x-aksen og grafen til f er $A = A_1 + A_2 = 5,3 + 0,83 \approx 6,13$

k) Forklar svaret i oppgave i) ved hjelp av utregningene i oppgave j). **(2%)**

Løsningen:

$\boldsymbol{f < 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)dx = -5,3}$ **og** $\boldsymbol{\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx = -5,3 + 0,83 \approx -4,5}$



Fagspesifikke karakterbeskrivelser

Beskrivelsen under er veiledende i forhold til å sette karakter, derfor må besvarelsen også vurderes i sin helhet.

Symbol	Betegnelse	Beskrivelse
A	Fremragende	Generelt: Fremragende prestasjon der kandidaten har løst problemer som krever fantasi og innsikt. Besvarelsen viser at kandidaten fullt ut behersker både de begrepsmessige, regnetekniske og anvendelsesmessige delene av emnet. Fremstillingen er klar og presis med korrekt bruk av notasjon og fagterminologi. Noen få mindre feil eller blanke punkter kan tillates.

		Klart ca 92% av besvarelsen
B	Meget god	Generelt: Meget god prestasjon der kandidaten har løst problemer som går utover det rutinemessige, og som krever god oversikt over emnet. Besvarelsen viser meget god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset. Fremstillingen er klar og med stort sett riktig bruk av terminologi og notasjon. Klart ca 80% av besvarelsen
C	God	Generelt: Gjennomsnittlig prestasjon der kandidaten har løst oppgaver av middels vanskelighetsgrad fra de fleste deler av kurset. Besvarelsen viser god beherskelse av de sentrale teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har ikke i særlig grad klart å anvende sine ferdigheter og kunnskaper på oppgaver som går ut over det rutinemessige. Fremstillingen er grei å forstå, men kan ha en del formelle mangler. Klart ca 60% av besvarelsen
D	Nokså god	Generelt: Prestasjon under gjennomsnittet der kandidaten har løst eller kommet et stykke på vei med oppgaver fra flere sentrale deler av kurset. Besvarelsen viser kjennskap til de viktigste teknikkene, begrepene og anvendelsene i kurset, men kandidaten har vanskelig for å komme helt i mål selv på rutinepregede oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men kan ha en god del formelle mangler. Klart ca 47% av besvarelsen
E	Tilstrekkelig	Generelt: Prestasjon som tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Besvarelsen viser at kandidaten har kjennskap til begreper, teknikker og anvendelser fra flere deler av kurset, og at han/hun til en viss grad kan bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver. Fremstillingen er stort sett forståelig, men røper klare feil og misforståelser. Klart ca 40% av besvarelsen
F	Ikke bestått	Generelt: Prestasjon som ikke tilfredsstiller minimumskravene. Besvarelsen viser at kandidaten har manglende kjennskap til sentrale teknikker, begreper og anvendelser, eller manglende evne til å bruke sine kunnskaper til å løse oppgaver.

		Besvarelser som bare viser beherskelse av en avgrenset del av emnet, vil normalt havne i denne kategorien.