Høgskolen i Østfold

EKSAMEN

<table>
<tr><td>Emnekode:
ITF10705</td><td>Emnenavn:
Diskret matematikk</td></tr>
<tr><td>Dato:
3. desember 2019</td><td>Eksamenstid:
09.00 – 13.00</td></tr>
<tr><td>Hjelpemidler:
- To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider.
Kalkulator er ikke tillatt.</td><td>Faglærer:
Christian F Heide</td></tr>
<tr><td colspan="2">Om eksamensoppgaven og poengberegning:
Oppgavesettet består av 7 sider inklusiv denne forsiden og tre sider med vedlegg. Kontroller at oppgavesettet er komplett.
Oppgavesettet består av 9 oppgaver. Ved sensur vil alle oppgavene telle like mye. Der en oppgave består av flere delspørsmål, kan delspørsmålene bli vektet ulikt ut fra arbeidsmengde og vanskelighetsgrad.
Der det er mulig skal du:
• Vise utregninger og hvordan du kommer fram til svarene.
• Begrunne dine svar, selv om dette ikke er eksplisitt sagt i hvert spørsmål.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sensurfrist: 30. desember 2019
Resultatene blir publisert i Studentweb.</td></tr>
</table>

Oppgave 1

Gitt tre mengder, A, B og C i et univers U. Mengdene A, B og C er ikke-disjunkte (og skal altså tegnes overlappende i venndiagrammene).

a) Bruk venndiagrammer til å illustrere mengdeoperasjonene $A \cap B$, $A \cup B$ og $\overline{C}$.

b) Mengden D er definert ved

$$D = \Big((A \cap B) \cup (\overline{C} \cap B)\Big) \cap \overline{A}$$

Illustrer mengden D i et venndiagram.

Oppgave 2

Benytt sannhetstabeller til å undersøke om de to følgende logiske utsagn er logisk ekvivalente:

i) $p \rightarrow (q \wedge r)$

ii) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

Oppgave 3

Gitt følgende logiske utsagn:

$$\neg\big((\neg p \vee q) \rightarrow p\big)$$

Benytt lovene i logikk til å finne hvilket av følgende utsagn det er logisk ekvivalent med. Angi hvilken lov du bruker i hvert trinn. Lovene er gitt i et av vedleggene til eksamensoppgaven.

1. q
2. $\neg p$
3. $p \wedge q$
4. $\neg p \wedge q$
5. $p \vee q$

Oppgave 4

Gitt mengden $A = \{2, 4, 10, 12\}$.

Det er definert en relasjon på A ved

$$R = \{(a, b) \mid a|b\}$$

hvor $a|b$ betyr at a deler b.

Relasjonsmengden R er altså mengden av de ordnede par med elementer fra A hvor det første tallet i paret deler det andre tallet.

a) Skriv relasjonen på listeform, altså som en mengde av ordnede par.

b) Tegn relasjonen som en rettet graf.

c) Undersøk relasjonens egenskaper, og benytt dette til å begrunne om R er en ekvivalensrelasjon, en delvis ordning eller ingen av delene.

d) Dersom relasjonen er en ekvivalensrelasjon, angi ekvivalensklassene. Dersom relasjonen er en delvis ordning, tegn hassediagrammet for relasjonen.

e) Er dette en totalordning? Begrunn svaret.

Oppgave 5

Gitt følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Finn følgende matriseprodukter dersom de eksisterer: $A \cdot B^T$ og $B^T \cdot A$.

b) Finn determinanten til A.

OPPGAVE 6

Benytt induksjonsbevis til å vise at følgende gjelder for alle $n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$:

$$1+5+5^2+5^3+\cdots+5^n = \frac{5^{n+1}-1}{4}$$

OPPGAVE 7

a) Finn den generelle løsningen av følgende differensligning:

$$y_n + 3y_{n-1} - 4y_{n-2} = 0$$

b) Finn den generelle løsningen av følgende differensligning:

$$y_n + 3y_{n-1} - 4y_{n-2} = 6\cdot 2^n$$

c) Finn løsningen av differensligningen i spørsmål b når følgende initialbetingelser er oppgitt: $y_0 = 2$ og $y_1 = -4$.

OPPGAVE 8

Lag en aksepterende automat med alfabet $\{0,1\}$ som aksepterer strenger som inneholder et antall 1-ere som er delelig med 3 (altså strenger med 0, 3, 6, 9, ... 1-ere).

OPPGAVE 9

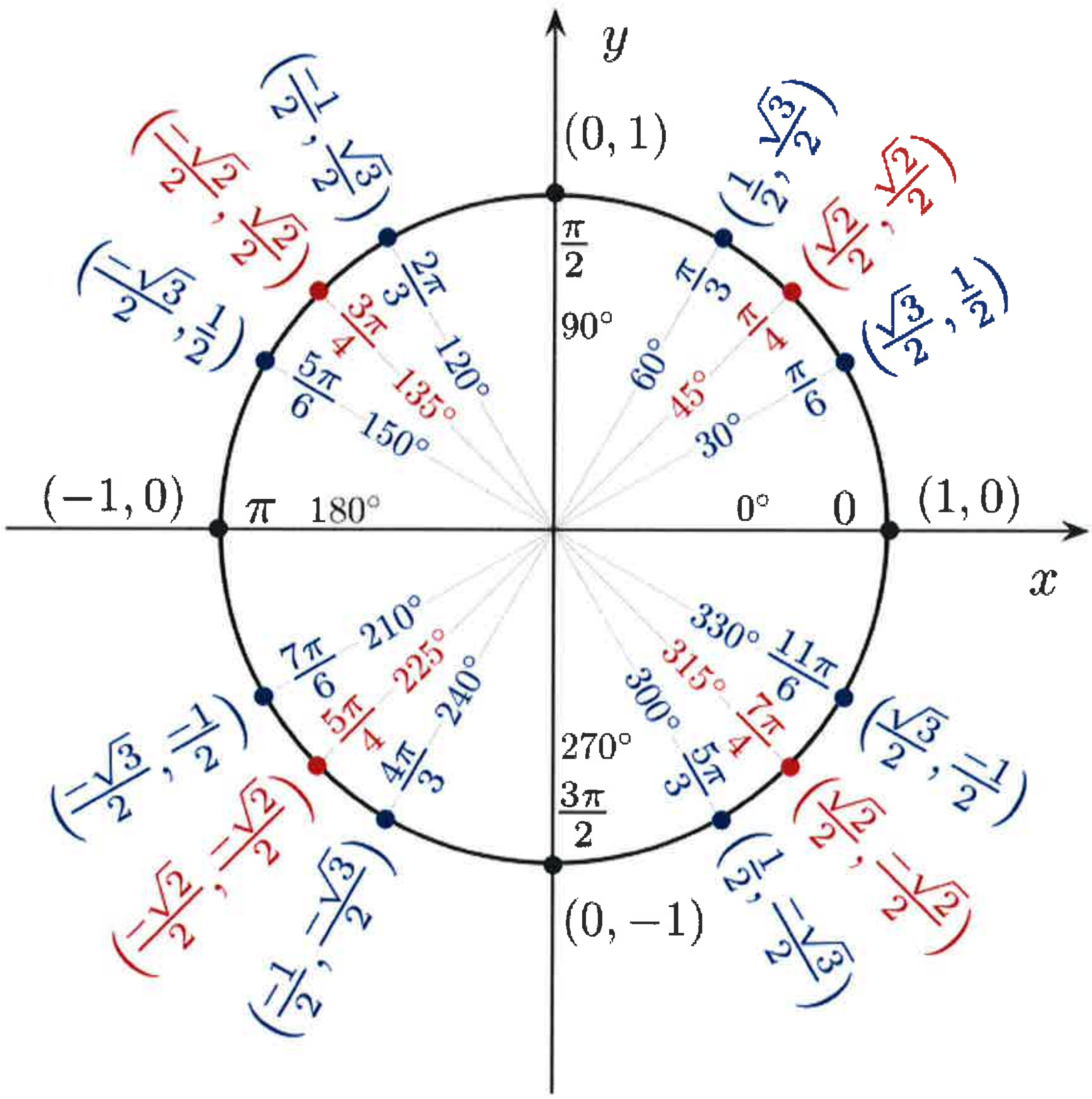
Gitt en grammatikk med startsymbol s, hvor mengden av ikke-avslutningssymboler er $N = \{s,t\}$ og mengden av avslutningssymboler er $T = \{0,1\}$. Grammatikken har følgende produksjonsregler:

1. $s \to 0t$
2. $t \to \lambda$
3. $s \to 0t1$
4. $t \to 1s$
5. $s \to 1t$

a) Er denne grammatikken kontekstfri, regulær eller ingen av delene? Begrunn svaret.

b) Kan strengen 010111 produseres av denne grammatikken? Hvis ja, vis hvordan. Hvis nei, forklar hvorfor ikke.

Eksakte trigonometriske verdier for noen vinkler



CFH, 11.09.14

Lover for logikk og mengder

Lov	Logikk	Mengder
1. Assosiative lover	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2. Kommutative lover	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
3.Distributive lover	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. De Morgans lover	$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
5. Idempotenslover	$p \vee p \Leftrightarrow p$ $p \wedge p \Leftrightarrow p$	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
6.Absorpsjonslover	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
7. Dobbel negasjon / Involusjonslov	$\neg (\neg p) \Leftrightarrow p$	$\overline{\overline{A}} = A$
8. Inverslover	$p \vee \neg p \Leftrightarrow S$ $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$	$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$
9. Identitetslover	$p \wedge S \Leftrightarrow p$ $p \vee F \Leftrightarrow p$	$A \cap U = A$ $A \cup \varnothing = A$
10. Dominanslover	$p \wedge F \Leftrightarrow F$ $p \vee S \Leftrightarrow S$	$A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cup U = U$
11. Implikasjon	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	
12. Kontrapositive utsagn	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$	

Inklusjons- og eksklusjonsprinsippet

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Kombinatorikk

	Ordnet utvalg	Uordnet utvalg
Med tilbakelegging	n^k	$\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$
Uten tilbakelegging	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\frac{n!}{(n-k)!k!}$

Differensligninger

En annenordens, homogen, lineær differensligning med konstante koeffisienter kan løses ved hjelp av karakteristisk ligning. Vi har tre tilfeller:

Dersom karakteristisk ligning har to reelle røtter, λ_1 og λ_2, er den generelle løsningen av differensligningen

$$y_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$$

Dersom karakteristisk ligning har én reell rot, λ, er den generelle løsningen av differensligningen

$$y_n = A\lambda^n + Bn\lambda^n$$

Dersom karakteristisk ligning har to komplekse røtter, $\lambda_1 = re^{i\phi}$ og $\lambda_2 = re^{-i\phi}$, er den generelle løsningen av differensligningen

$$y_n = r^n(A\cos n\phi + B\sin n\phi)$$