HØGSKOLEN I ØSTFOLD, AVDELING FOR INFORMASJONSTEKNOLOGI

Forkurs i matematikk

6. juni 2019

Løsningsforslag

Christian F. Heide

June 7, 2019

OPPGAVE 1

Tom Heine og Karen åpner en potetgullpose på 200 g lørdag kveld, og spiser til sammen eksakt halvparten av posens innhold. Deretter setter de den i skapet og er enige om å ikke røre den før neste lørdag. Tom Heine klarer imidlertid ikke la være, og hver dag de neste seks dagene smugspiser han 5 % av det resterende innholdet.

a) *Hvor mye inneholder posen når de åpner posen igjen lørdag kveld?*
Etter at de har spist halvparten, er det altså 100 g igjen.
Når Tom Heine spiser 5 % hver dag, betyr det at resten R som er igjen etter én dag med Tom Heines spising er

$$R(1) = 100 \cdot 0.95$$

fordi når noe minker med 5 % er det 95 % igjen, altså 0.95 ganger det som var opprinnelig.

Etter to dager er resten

$$R(2) = R(1) \cdot 0.95 = (100 \cdot 0.95) \cdot 0.95 = 100 \cdot 0.95^2$$

mens det etter n dager er igjen

$$R(n) = 100 \cdot 0.95^n$$

Når de åpner posen igjen lørdag kveld, har Tom Heine spist i 6 dager, og det er da igjen

$$R(6) = 100 \cdot 0.95^6 = 100 \cdot 0.735 = \underline{\underline{73.5 \text{ g}}}$$

b) *Hvor sur blir Karen da?*
Karen blir såpass sur at Tom Heine må bo i garasjen resten av helgen.

c) *Dersom Tom Heine skulle ha smugspist maksimalt 20 g, hvor mange dager kunne han ha bedrevet smugspisingen da? Her antar vi fortsatt at han hver dag spiser 5 % av det resterende innholdet..*
Hvis han spiser 20 g er det 80 g igjen. Vi må altså finne den n som gjør at

$$R(n) = 80$$

Dette finner vi slik

$$100 \cdot 0.95^n = 80$$

Vi deler med 100 på begge sider av likhetstegnet, og får

$$0.95^n = \frac{80}{100}$$

som etter forkorting på høyre side blir

$$0.95^n = \frac{4}{5}$$

Så tar vi logaritmen på begge sider, og får

$$\ln 0.95^n = \ln \frac{4}{5}$$

Vi benytter så regelen $\ln a^b = b \cdot \ln a$ på venstre side, og får

$$n \cdot \ln 0.95 = \ln \frac{4}{5}$$

Så deler vi med $\ln 0.95$ på begge sider, og får

$$n = \frac{\ln \frac{4}{5}}{\ln 0.95} \approx 4.35$$

Altså:

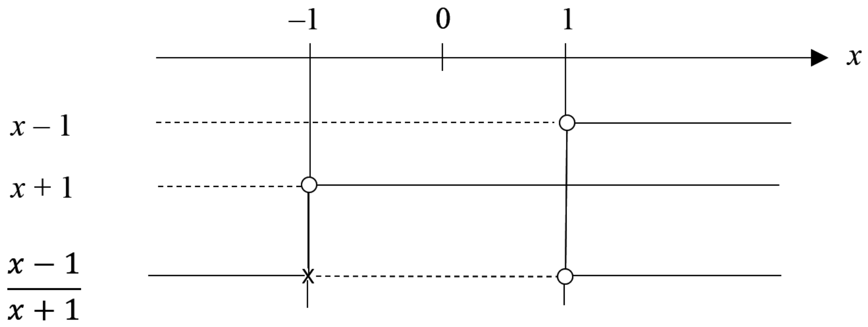
Tom Heine kan smugspise i 4 dager dersom han maksimalt skal spise 20 g.

OPPGAVE 2

a) *Løs følgende ulikhet ved regning:*

$$\frac{x-1}{x+1} \leq 0$$

Denne kan vi løse ved å tegne fortegnsskjema. Vi tegner en fortegnslinje for telleren, en fortegnslinje for nevneren og kan da tegne en fortegnslinje for brøken som helhet:



Oppgaven er å finne hvor brøken er mindre enn eller lik 0, altså negativ eller 0.

Vi ser at brøken som helhet er negativ når x er mellom -1 og 1, og 0 for $x = 1$.

Svaret blir følgelig:

$$\underline{\underline{-1 < x \leq 1}}$$

b) *Løs følgende ligning ved regning:*

$$x - 1 = \sqrt{x+5}$$

Vi kvadrerer begge sider:

$$(x-1)^2 = \left(\sqrt{x+5}\right)^2$$

som gir

$$x^2 - 2x + 1 = x + 5$$

Vi flytter alt over på venstre side:

$$x^2 - 2x + 1 - x - 5 = 0$$

og trekker sammen

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

Vi kan løse denne ved hjelp av abc-formelen:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \vee \quad x = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Vi må til slutt sette prøve på disse løsningene for å se om det er introdusert falske løsninger.

$\underline{x = 4:}$
VS: $4 - 1 = 3$
HS: $\sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$
Vi ser at VS = HS, så dette er en løsning av lignignen.

$\underline{x = -1:}$
VS: $-1 - 1 = -2$
HS: $\sqrt{-1+5} = \sqrt{4} = 2$
Vi ser at VS $\neq$ HS.
$x = -1$ er altså ikke en løsning av ligningen.

Løsningen av ligningen er altså

$$\underline{\underline{x = 4}}$$

OPPGAVE 3

a) *Løs følgende ligning ved regning:*

$$10^{3x} = 32$$

Denne kan vi løse ved å ta logaritmen på begge sider. Det er da mest naturlig å bruke den briggske logaritmen lg (altså logaritmen med grunntall 10) siden $\lg 10 = 1$. Vi får da

$$\lg 10^{3x} = \lg 32$$

Vi bruker så regelen $\lg a^b = b \cdot \lg a$, og får

$$3x \cdot \lg 10 = \lg 32$$

og, siden $\lg 10 = 1$, får vi

$$3x = \lg 32$$

Vi deler på begge sider med 3, og får

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{3} \lg 32}} \quad \approx 0.502$$

b) *Løs følgende ligning ved regning:*

$$3\ln x = 6$$

Vi deler først på begge sider med 3:

$$\frac{3 \cdot \ln x}{3} = \frac{6}{3}$$

som gir

$$\ln x = 2$$

Vi eksponentierer begge sider:

$$e^{\ln x} = e^2$$

Siden e^x og $\ln x$ er inverse funksjoner vil de oppheve virkningen av hverandre. Venstre side blir derfor x, og vi får løsningen

$$\underline{\underline{x = e^2}} \quad \approx 7.389$$

Oppgave 4

Til eksamen i videregående skole strøk 7 % i matematikk, 12 % strøk i fysikk og 4 % strøk i både matematikk og fysikk.

En elev blir trukket ut tilfeldig.

Vi definerer følgende hendelser:
 M: *Den uttrukne eleven strøk i matematikk.*
 F: *Den uttrukne eleven strøk i fysikk.*

a) *Hva er sannsynligheten for at den uttrukne eleven besto eksamen i matematikk?*
Dette er den komplementære hendelsen til hendelsen at eleven strøk i matematikk. Vi kan skrive denne hendelsen $\overline{M}$, og sannsynligheten vi skal finne er altså $P(\overline{M})$. Sannsynligheten for at eleven strøk i matematikk, er oppgitt i oppgaven til $P(M) = 0.07$. Sannsynligheten for at den uttrukne eleven besto, er derfor

$$P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0.07 = \underline{\underline{0.93}}$$

b) *Hva er sannsynligheten for at den uttrukne eleven strøk i enten matematikk eller fysikk eller begge deler?*
Dette er sannsynligheten $P(M \cup F)$. Ved å bruke addisjonssetningen får vi

$$P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F)$$

Følgende sannsynligheter er oppgitt i oppgaven:

$$P(M) = 0.07$$

$$P(F) = 0.12$$

$$P(M \cap F) = 0.04$$

Vi får derfor

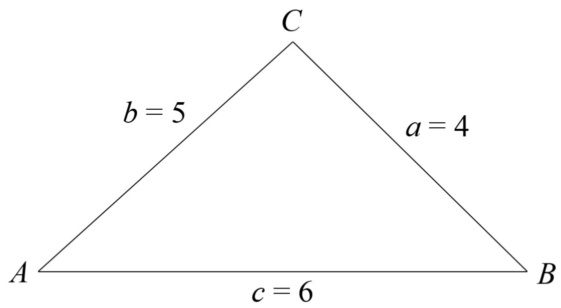
$$P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F) = 0.07 + 0.12 - 0.04 = \underline{\underline{0.15}}$$

c) *Hva betyr $P(F \mid M)$? Finn sannsynligheten $P(F \mid M)$.*
$P(F \mid M)$ er sannsynligheten for at den uttrukne eleven har strøket i fysikk gitt at han/hun har strøket i matematikk.
Denne kan vi finne slik:

$$P(F \mid M) = \frac{P(M \cap F)}{P(M)} = \frac{0.04}{0.07} = \underline{\underline{0.57}}$$

Oppgave 5

Gitt følgende trekant:



a) *Finn vinklene i trekanten.*
Vinkel A kan vi finne ved hjelp av cosinussetningen, som lyder:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Løser vi denne med hensyn på $\cos A$, finner vi

$$2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Setter vi så inn tall, får vi

$$\cos A = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{25 + 36 - 16}{60} = \frac{45}{60} = 0.75$$

som gir

$$A = \cos^{-1} 0.75 = \underline{\underline{41.4^\circ}}$$

Vi kan finne en av de andre vinklene, for eksempel B, på nøyaktig den samme måten (eller vi kan bruke sinus-setningen):

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

som gir

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4^2 + 6^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{16 + 36 - 25}{48} = \frac{27}{48} = 0.5625$$

og

$$B = \cos^{-1} 0.5625 = \underline{\underline{55.8^\circ}}$$

Den siste vinkelen, vinkel C i vårt tilfelle, finner vi enklest ved å benytte at vinkelsummen i en trekant er 180°:

$$C = 180^\circ - A - B = 180^\circ - 41.4^\circ - 55.8^\circ = \underline{\underline{82.8^\circ}}$$

b) *Finn arealet av trekanten.*
Arealet er gitt ved

$$T = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} 5 \cdot 6 \cdot \sin 41.4^\circ = \underline{\underline{9.9}}$$

Oppgave 6

a) *Gitt to punkter $A(-1, 3)$ og $B(-2, 1)$.*

Finn $\overrightarrow{AB}$.
Denne er finner vi ved å ta sluttpunkt og trekke fra startpunkt, altså

$$\overrightarrow{AB} = [-2 - (-1), 1 - 3] = [-2 + 1, -2] = \underline{\underline{[-1, -2]}}$$

b) *Gitt to andre vektorerer:*

$$\vec{u} = [1, -3]$$

$$\vec{v} = [-2, 4]$$

Finn lengden av disse vektorene.

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 9} = \underline{\underline{\sqrt{10}}}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \underline{\underline{\sqrt{20}}}$$

c) *Finn skalarproduktet $\vec{u} \cdot \vec{v}$.*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = [1, -3] \cdot [-2, 4] = 1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 4 = -2 - 12 = \underline{\underline{-14}}$$

d) *Finn vinkelen mellom vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$.*
Vinkelen kan vi finne ved å bruke definisjonen av skalarprodukt:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

hvor $(\vec{u}, \vec{v})$ er vinkelen mellom vektorene. Løser vi denne med hensyn på $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ får vi

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Setter vi inn tall, finner vi

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-14}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{20}} = -0.9899$$

og vinkelen mellom vektorene er følgelig

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \cos^{-1}(-0.9899) = \underline{\underline{171.9^\circ}}$$

Oppgave 7

a) *Gitt $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$.*

Finn $f'(x)$.

Det kan være enklere å derivere denne ved å huske at det å ta kvadratroten er det samme som å opphøye i $\frac{1}{2}$. Vi kan altså skrive funksjonen

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3} = \left(x^2 - 3\right)^{\frac{1}{2}}$$

I tillegg må vi huske å bruke kjerneregelen. Her er kjernen $x^2 - 3$, og vi må altså gange med den deriverte av den, altså med $2x$. Vi får da

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 3\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (x^2 - 3)' = \frac{1}{2}\left(x^2 - 3\right)^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} \cdot 2x = \frac{2x}{2}\left(x^2 - 3\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$\underline{\underline{x\left(x^2 - 3\right)^{-\frac{1}{2}}}} = \underline{\underline{\frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}}}$$

b) *Gitt funksjonen*

$$g(x) = \frac{x^3 - 7}{2x}$$

Finn $g'(x)$.

Regelen for derivasjon av brøker kan skrives

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Bruker vi dette, får vi

$$g'(x) = \frac{3x^2 \cdot 2x - (x^3 - 7) \cdot 2}{(2x)^2} = \frac{6x^3 - 2x^3 + 14}{4x^2} = \frac{4x^3 + 14}{4x^2} =$$

$$\underline{\underline{\frac{2x^3 + 7}{2x^2}}}$$

c) *Finn integralet*

$$\int \frac{4}{x^3} dx$$

Vi kan omskrive integranden slik: $\frac{4}{x^3} = 4x^{-3}$. Integralet blir da

$$\int \frac{4}{x^3} dx = \int 4x^{-3} dx = 4 \int x^{-3} dx = 4 \cdot \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C = \frac{4}{-2} x^{-2} + C =$$

$$\underline{\underline{-2x^{-2} + C}} \quad = \quad \underline{\underline{-\frac{2}{x^2} + C}}$$