Høgskolen i Østfold

EKSAMEN

Emnekode:	**Emnenavn:**
ITD15013	Matematikk 1 – andre deleksamen
Dato: 20. mai 2019	**Eksamenstid:** 09.00 – 12.00
Hjelpemidler: • To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. • Formelhefte. • Kalkulator som deles ut samtidig med oppgaven.	**Faglærer:** Christian F Heide

Om eksamensoppgaven og poengberegning:

Oppgavesettet består av 7 sider inklusiv denne forsiden og tre vedlegg. Kontroller at oppgavesettet er komplett.

Oppgavesettet består av 7 oppgaver. Det er angitt hvor mye hver oppgave teller ved sensuren. Der en oppgave består av flere delspørsmål, kan delspørsmålene bli vektet ulikt ut fra arbeidsmengde og vanskelighetsgrad.

Husk å vise utregninger og hvordan du kommer fram til svarene.

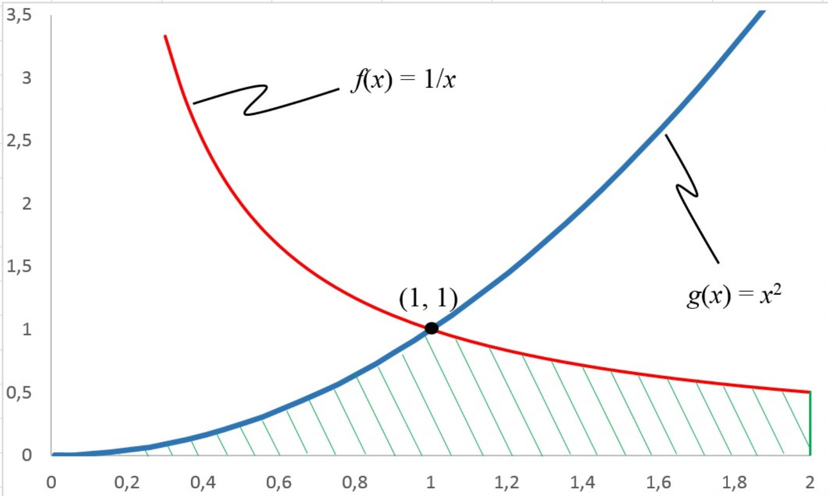
Sensurfrist:

11. juni 2019

Karakterene er tilgjengelige for studenter på Studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. www.hiof.no/studentweb

OPPGAVE 1 (10 %)

Grafene til funksjonene $f(x) = \frac{1}{x}$ og $g(x) = x^2$ er vist i figuren nedenfor. Grafene skjærer hverandre i punktet $(1,1)$.



Finn arealet av området mellom $x = 0$ og $x = 2$ som i underkant er begrenset av x-aksen og i overkant er begrenset av den til enhver tid nederste av grafene, altså arealet av det skraverte området.

OPPGAVE 2 (15 %)

Gitt følgende ligningssystem:

$$\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 &= 0 \\
x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\
3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 &= 0
\end{aligned}$$

a) Skriv opp koeffisientmatrisen til ligningssystemet. Løs så ligningssystemet ved å bringe koeffisientmatrisen på redusert trappeform. Skriv løsningen på vektorform.

b) Vi kaller koeffisientmatrisen til dette ligningssystemet for A.
Finn en basis for kolonnerommet til A og en basis for nullrommet til A.

c) Angi rangen og nulliteten til A.

OPPGAVE 3 (15 %)

Bruk laplacetransformasjonen til å løse følgende initialverdiproblem:

$$y'' - y' - 6y = 4\delta(t) \qquad y(0) = 2, y'(0) = -3$$

OPPGAVE 4 (15 %)

Gitt følgende målinger:

x	1	2	3
y	-1	1	7

Benytt minste kvadraters metode til å finne den rette linjen som best passer til disse målingene.

Tips: Minste kvadraters metode er generelt sett beskrevet av ligningssystemet

$$A^T A\boldsymbol{x} = A^T \boldsymbol{y}$$

hvor A er bygd opp av målingenes x-verdier på følgende måte

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m \end{bmatrix}$$

mens $\boldsymbol{y}$ består av målingenes y-verdier

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{x}$ er vektoren av koeffisientene som inngår i polynomet $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$, altså

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

OPPGAVE 5 (15 %)

Gitt følgende differensialligning:

$$y' - (\sin x) \cdot y = \sin x$$

a) Finn den generelle løsningen av ligningen.

b) Finn løsningen av ligningen når du kjenner grensebetingelsen $y(\frac{\pi}{2}) = 4$.

OPPGAVE 6 (15 %)

En lineærtransformasjon er definert ved følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Finn lineærtransformasjonens egenverdier og tilhørende egenvektorsett.

OPPGAVE 7 (15 %)

En stund før klokka 12 blir en død kropp funnet, og politiet mistenker at vedkommende ikke har dødd en naturlig død. Politiet kontakter deg for at du skal bistå dem med å finne dødstidspunktet.

Du ankommer åstedet og måler den døde kroppens temperatur til 26.5 °C. Klokka er da 12.00. Du måler på nytt klokka 13.00, og temperaturen er da sunket til 23.9 °C.

Kroppen har ligget i et rom som du kan anta har hatt konstant temperatur på 21 °C. Du kan også anta at kroppen hadde en temperatur på 37 °C ved dødstidspunktet, og at avkjølingen som har skjedd følger Newtons avkjølingslov som sier:

> Endringen i kroppens temperatur er proporsjonal med differansen mellom kroppens temperatur og omgivelsenes temperatur.

Matematisk kan dette uttrykkes

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - L)$$

Finn dødstidspunktet basert på ovenstående fakta og antagelser.

Høgskolen i Østfold

CFH, 8. desember 2017

Matematikk 1

Laplacetransformasjonen – formelliste

Definisjon av laplacetransformasjonen: $Y(s) = \mathcal{L}(y(t)) = \int_0^\infty y(t)\, e^{-st} dt$

$y(t)$	$Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$	Konvergensområde/ kommentar
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
$t^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$t^n e^{at} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$s > a$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$s > a$
$y(t)\, e^{at}$	$Y(s-a)$	
$u(t-a)$	$\frac{1}{s} e^{-as}$	Enhetssprang
$y(t-a)\, u(t-a)$	$e^{-as}\, Y(s)$	
$\delta(t-a)$	e^{-as}	Enhetspuls (Diracs delta)

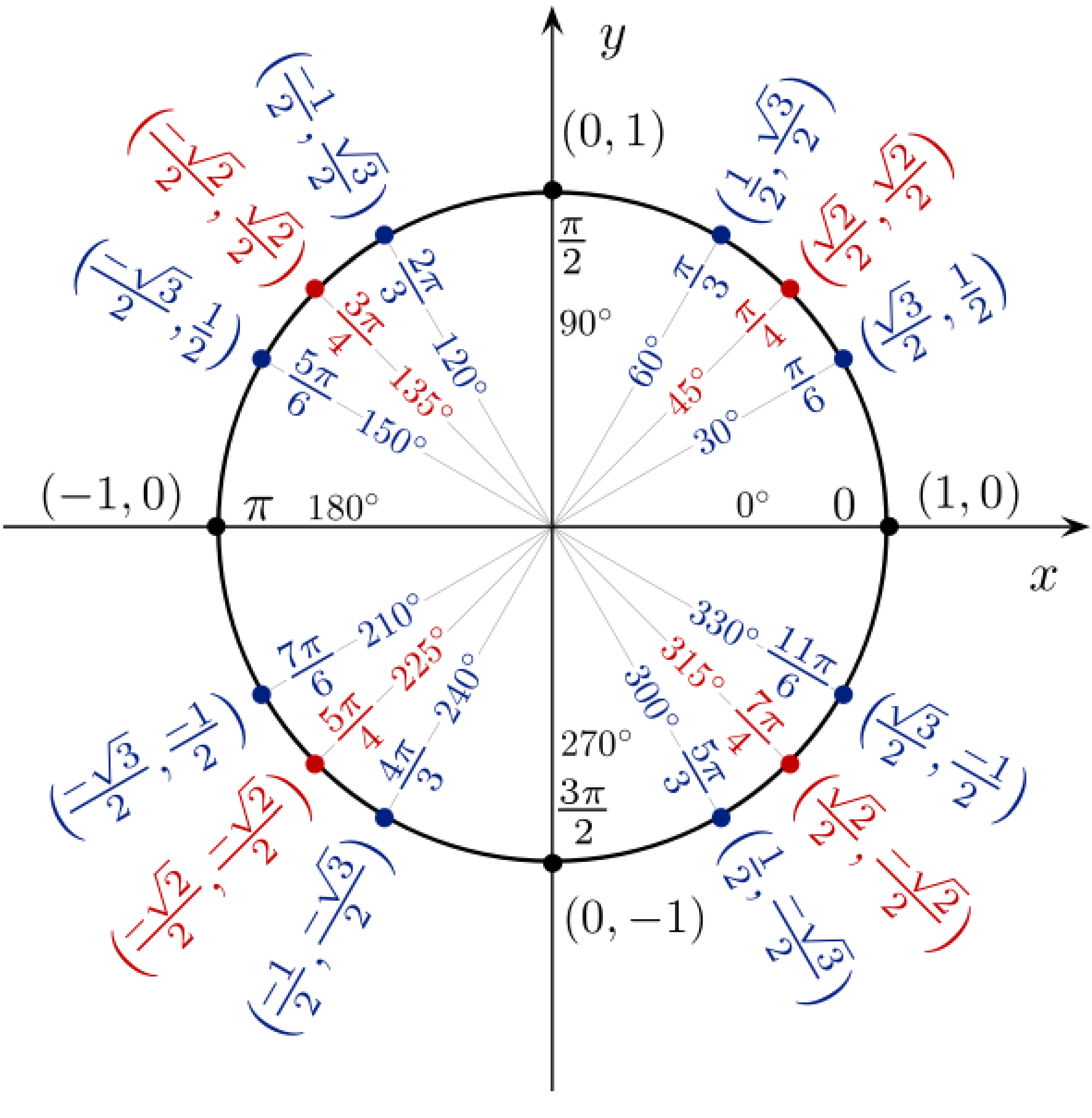
Derivasjon og integrasjon:

$$\mathcal{L}\left(y'(t)\right) = sY - y(0)$$

$$\mathcal{L}\left(y''(t)\right) = s^2 Y - sy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t y(u)\, du\right) = \frac{1}{s} Y$$

Eksakte trigonometriske verdier for noen vinkler



Løsning av differensialligninger – en oppsummering

1. **Konstante koeffisienter foran *y*, *y*' og *y*'' (lineære ligninger).**
   - **a.** Homogen ligning (høyre side er 0)
     - Løses ved hjelp av karakteristisk ligning. Vi får ett av tre tilfeller avhengig av løsningen av den karakteristiske ligningen:
       - To reelle løsninger, λ_1 og λ_2. Den generelle løsningen av diff.lign:
         $$y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$
       - Én reell løsning, λ. Den generelle løsningen av diff.lign:
         $$y = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$$
       - To komplekse løsninger, $\lambda = \alpha \pm \beta i$. Den generelle løsningen:
         $$y = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$$
   - **b.** Inhomogen ligning (høyre side er ikke 0)
     - Finn først løsningen av den tilhørende homogene ligningen, y_h. Denne løses som i punkt a.
     - Finn så en partikulær løsning y_p av den inhomogene ligningen ved å anta at y_p er av samme form som høyre side i ligningen (sjekk om den må oppgraderes). Sett inn den y_p du gjetter på i differensialligningen og finn på den måten de ubestemte konstantene i denne løsningen.
     - Den generelle løsningen av den inhomogene ligningen er gitt ved
       $$y = y_h + y_p$$

2. **Variable koeffisienter foran *y* og/eller *y*'.**
   - **a.** Dersom ligningen kan separeres: Løses ved å separere, integrere og løse med hensyn på y.
   - **b.** Dersom ligningen ikke kan separeres (men er lineær): Bring ligningen på standard form, altså en form der faktoren foran y' er 1. Formen skal altså være
     $$y' + p(t)y = r(t)$$
     Finn så den integrerende faktor $e^{\int p(t)dt}$ og gang hele ligningen med denne. Da kan du forenkle venstre side i ligningen og skrive den som den deriverte av et produkt, og kan derfor enkelt integrere den.

Ubestemte konstanter

Ubestemte konstanter i den generelle løsningen finnes helt til slutt ved hjelp av initialbetingelser/grensebetingelser.