Høgskolen i Østfold

# EKSAMEN – ny og utsatt

| **Emnekode:**<br><br>ITF10705 | **Emnenavn:**<br><br>Matematikk for IT |
|---|---|
| **Dato:**<br><br>4. juni 2018 | **Eksamenstid:**<br><br>09.00 – 13.00 |
| **Hjelpemidler:**<br><br>- To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider.<br><br>Kalkulator er **ikke tillatt**. | **Faglærer:**<br><br>Christian F Heide |

**Om eksamensoppgaven og poengberegning:**

Oppgavesettet består av 8 sider inklusiv denne forsiden og to sider med vedlegg. Kontroller at oppgavesettet er komplett.

Oppgavesettet består av 12 oppgaver. Ved sensur vil alle oppgavene telle like mye. Der en oppgave består av flere delspørsmål, kan delspørsmålene bli vektet ulikt ut fra arbeidsmengde og vanskelighetsgrad.

Der det er mulig skal du:

- Vise utregninger og hvordan du kommer fram til svarene.
- Begrunne dine svar, selv om dette ikke er eksplisitt sagt i hvert spørsmål.

**Sensurfrist:**

25. juni 2018

Karakterene er tilgjengelige for studenter på Studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. www.hiof.no/studentweb

# OPPGAVE 1

Vis ved induksjon at

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

for alle $n \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Tips: Husk at $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$.

# OPPGAVE 2

Gitt følgende utsagn:

Hvis $3n + 2$ er et oddetall, så er $n$ et oddetall.

**a)** Dette utsagnet kan skrives med symboler som implikasjonen $p \to q$.
Hva er i så fall $p$ og $q$?

**b)** Hva blir det kontrapositive utsagnet til dette? Skriv svaret både med symboler og som tekst.

**c)** Forklar kort prinsippet for kontrapositivt bevis.

**d)** Bevis det gitte utsagnet ved kontrapositivt bevis

# OPPGAVE 3

**a)** En funksjon $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, hvor $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ er mengden av alle heltall, er definert ved

$$f(n) = n^2 + 1$$

Er denne funksjonen injektiv og/eller surjektiv? Begrunn svaret.

**b)** Vi har igjen funksjonsuttrykket $f(n) = n^2 + 1$, men vi begrenser nå domenet ved at vi definerer funksjonen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, hvor $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ er mengden av alle naturlige tall.

Er denne funksjonen injektiv og/eller surjektiv? Begrunn svaret.

## Oppgave 4

**a)** Hva er en tautologi?

**b)** Bruk sannhetstabeller til å undersøke om følgende logiske utsagn er en tautologi:

$$\big((p \to q) \to r\big) \to \big((r \to q) \to p\big)$$

## Oppgave 5

Gitt følgende logiske utsagn:

$$\big(\neg(p \land q) \to \neg(\neg p \lor q)\big) \land p$$

Benytt lovene i logikk gitt på vedlagte ark til å finne hvilket av følgende utsagn det er logisk ekvivalent med:

1. $p \land q$
2. $p$
3. $p \lor \neg q$
4. $\neg p \land q$
5. $\neg q$

## Oppgave 6

Gitt følgende binære tall:

1101011

og

1011

Utfør en multiplikasjon av disse tallene på binær form (altså uten å konvertere dem til et annet tallsystem).

Skriv svaret både på binær form og heksadesimal form.

## OPPGAVE 7

Lag en aksepterende automat med alfabet $\{0,1\}$ som aksepterer alle strenger som **ikke** inneholder to nuller på rad.

## OPPGAVE 8

Gitt en grammatikk med startsymbol $s$, hvor mengden av ikke-avslutningssymboler er $N = \{s, t\}$ og mengden av avslutningssymboler er $T = \{0,1\}$. Grammatikken har følgende produksjonsregler:

1. $s \to \lambda$
2. $t \to \lambda$
3. $s \to 1s$
4. $s \to 0t$
5. $t \to 1s$

**a)** Er denne grammatikken kontekstfri, regulær eller ingen av delene? Begrunn svaret.

**b)** Kan strengen 0111 produseres av denne grammatikken? Hvis ja, vis hvordan. Hvis nei, forklar hvorfor ikke.

## OPPGAVE 9

Gitt mengden $A = \{a, b, c, d, e\}$.

Det er definert en relasjon, $R$, på $A$ ved

$$R = \{(a,a),(b,b),(a,c),(c,a),(c,c),(c,d),(d,c),(d,d)\}$$

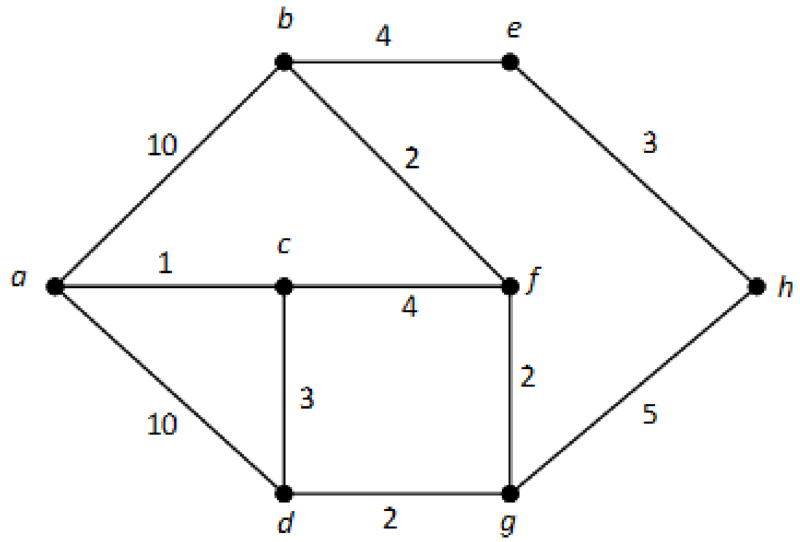
**a)** Begrunn hvorvidt relasjonen $R$ er refleksiv, symmetrisk, antisymmetrisk og/eller transitiv.

**b)** Bruk det du fant i spørsmål a til å avgjøre om $R$ er en ekvivalensrelasjon, en delvis ordning eller ingen av delene.

**c)** Er relasjonen $R$ en funksjon? Begrunn svaret.

# OPPGAVE 10

Gitt følgende vektede graf:




Bruk Kruskals algoritme til å finne et minimalt spenntre for grafen. Vis hvert trinn i algoritmen.

# OPPGAVE 11

**a)** Finn den generelle løsningen av følgende differensligning:

$$y_n - 8y_{n-1} + 16y_{n-2} = 0$$

**b)** Gitt følgende differensligning:

$$y_n - 8y_{n-1} + 16y_{n-2} = 2 \cdot 4^n$$

Finn den generelle løsningen av denne.

**c)** Bestem konstantene som inngår i løsningen som du fant i spørsmål b) når følgende startbetingelser er gitt:

$$y_0 = 4$$
$$y_1 = 24$$

# OPPGAVE 12

En turingmaskin er definert ved følgende fem-tupler:

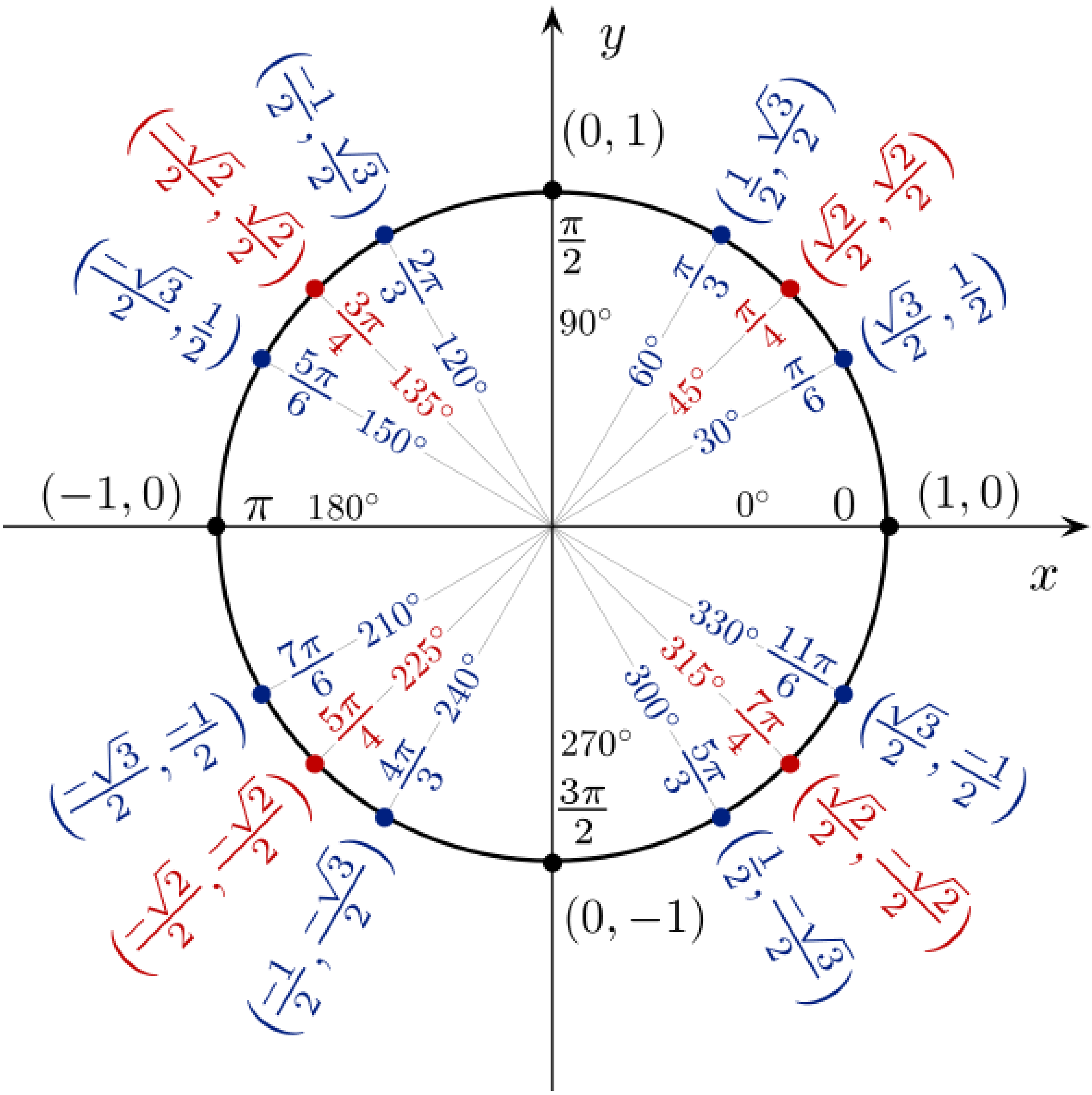
1. $(s_0, 0, s_1, 1, R)$
2. $(s_0, 1, s_0, 0, R)$
3. $(s_1, 0, s_1, 1, R)$
4. $(s_1, 1, s_0, 0, R)$
5. $(s_0, B, s_2, 1, L)$
6. $(s_1, B, s_2, 1, L)$

Anta nå at vi kjører turingmaskinen med en tape som ved oppstart ser slik ut:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | 0 | 0 | B | ... |

Vis hvert trinn i kjøringen av denne turingmaskinen. Angi hvordan tapen ser ut etter kjøringen (altså hvilke symboler som står i de ulike cellene), og hvilken tilstand turingmaskinen er i etter kjøringen.

**Eksakte trigonometriske verdier for noen vinkler**



CFH, 11.09.14

# Lover for logikk og mengder

| Lov | Logikk | Mengder |
|---|---|---|
| 1. Assosiative lover | $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$<br>$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$<br>$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ |
| 2. Kommutative lover | $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$<br>$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ | $A \cup B = B \cup A$<br>$A \cap B = B \cap A$ |
| 3.Distributive lover | $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$<br>$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$<br>$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| 4. De Morgans lover | $\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$<br>$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ | $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$<br>$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ |
| 5. Idempotenslover | $p \vee p \Leftrightarrow p$<br>$p \wedge p \Leftrightarrow p$ | $A \cup A = A$<br>$A \cap A = A$ |
| 6.Absorpsjonslover | $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$<br>$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ | $A \cup (A \cap B) = A$<br>$A \cap (A \cup B) = A$ |
| 7. Dobbel negasjon / Involusjonslov | $\neg (\neg p) \Leftrightarrow p$ | $\overline{\overline{A}} = A$ |
| 8. Inverslover | $p \vee \neg p \Leftrightarrow S$<br>$p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$ | $A \cup \overline{A} = U$<br>$A \cap \overline{A} = \varnothing$ |
| 9. Identitetslover | $p \wedge S \Leftrightarrow p$<br>$p \vee F \Leftrightarrow p$ | $A \cap U = A$<br>$A \cup \varnothing = A$ |
| 10. Dominanslover | $p \wedge F \Leftrightarrow F$<br>$p \vee S \Leftrightarrow S$ | $A \cap \varnothing = \varnothing$<br>$A \cup U = U$ |
| 11. Implikasjon | $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ | |
| 12. Kontrapositive utsagn | $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$ | |

**Inklusjons- og eksklusjonsprinsippet**

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$