Høgskolen i Østfold

EKSAMEN

<table>
<tr><td>Emnekode:

ITD15013</td><td>Emnenavn:

Matematikk 1 – andre deleksamen</td></tr>
<tr><td>Dato:

24. mai 2018</td><td>Eksamenstid:

09.00 – 12.00</td></tr>
<tr><td>Hjelpemidler:

• To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider.
• Formelhefte.
• Kalkulator som deles ut samtidig med oppgaven.</td><td>Faglærer:

Christian F Heide</td></tr>
<tr><td colspan="2">Om eksamensoppgaven og poengberegning:

Oppgavesettet består av 8 sider inklusiv denne forsiden og tre vedlegg. Kontroller at oppgavesettet er komplett.

Oppgavesettet består av 7 oppgaver. Det er angitt hvor mye hver oppgave teller ved sensuren. Der en oppgave består av flere delspørsmål, kan delspørsmålene bli vektet ulikt ut fra arbeidsmengde og vanskelighetsgrad.

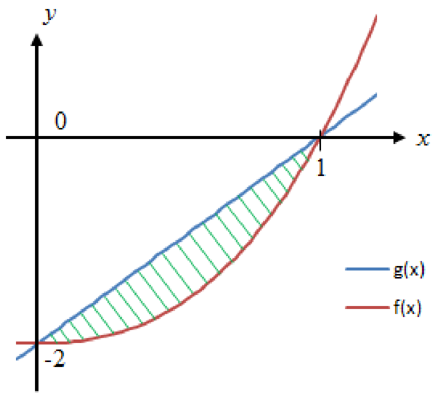
Husk å vise utregninger og hvordan du kommer fram til svarene.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sensurfrist:

14. juni 2018

Karakterene er tilgjengelige for studenter på Studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. www.hiof.no/studentweb</td></tr>
</table>

OPPGAVE 1 (10 %)

Grafene til funksjonene $f(x) = x^3 + x^2 - 2$ og $g(x) = 2x - 2$ er vist i figuren nedenfor. Grafene skjærer hverandre i punktene $(0, -2)$ og $(1, 0)$.



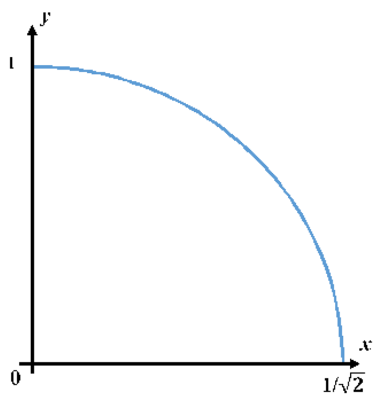
Finn arealet mellom grafene i figuren, altså arealet av det skraverte området.

OPPGAVE 2 (10 %)

Grafen til funksjonen

$$f(x) = \sqrt{1 - 2x^2}$$

mellom $x = 0$ og $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, er vist i figuren nedenfor.



Denne grafen roteres om y-aksen.

Finn volumet av det omdreiningslegemet som da fremkommer.

OPPGAVE 3 (15 %)

Gitt følgende ligningssystem:

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\
-2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\
x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

a) Dette ligningssystemet kan skrives på matriseform, altså som $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
Angi hva A, $\boldsymbol{x}$ og $\boldsymbol{b}$ er i dette tilfelle.

b) Finn determinanten til A, og forklar hva den den forteller om hvor mange løsninger ligningssystemet har.

c) Finn den inverse matrisen, A^{-1}.

d) Finn løsningen av ligningssystemet ved å beregne $A^{-1}\boldsymbol{b}$.

OPPGAVE 4 (10 %)

Gitt følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finn følgende matriseprodukter dersom de eksisterer:

a) AB

b) BA

c) $A^T A$

OPPGAVE 5 (25 %)

Gitt følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og de tilhørende egenvektorsettene til A.

På den svenske øya Syd-Koster driver et firma med sykkelutleie. Det er to steder hvor man kan leie sykler: Ekenäs og Långegärde. Syklene kan leies fra klokken 08.00 om morgenen og må leveres tilbake på ett av disse to stedene innen klokken 20.00 om kvelden.

Det viser seg at av de syklene som leies ved Ekenäs, returneres 80 % til Ekenäs og 20 % til Långegärde. Av syklene som leies ved Långegärde, returneres 30 % til Ekenäs og 70 % til Långegärde. For enkelhets skyld antar vi at dette brukermønsteret ikke endrer seg over tid, at alle sykler blir utleid hver morgen og at ingen sykler blir ødelagt eller stjålet. Anta at det i utgangspunktet er like mange sykler ved Ekenäs som ved Långegärde.

Vi betegner andelen sykler ved Ekenäs ved starten e_0 og andelen sykler ved Långegärde ved starten l_0. Andelen sykler på de to stedene etter ett døgn, kaller vi henholdsvis e_1 og l_1.

b) Finn e_1 og l_1 uttrykt ved e_0 og l_0.

Vi kan bruke betegnelsen $\boldsymbol{x}_0$ på vektoren $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} e_0 \\ l_0 \end{bmatrix}$.

Vektoren $\boldsymbol{x}_1$ er da andelen sykler på de to stedene etter ett døgn, altså $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} e_1 \\ l_1 \end{bmatrix}$.

Vi kan da skrive $\boldsymbol{x}_1 = A\boldsymbol{x}_0$, hvor A er matrisen gitt i spørsmål a).

c) Begrunn at $\boldsymbol{x}_\mathrm{n} = A^\mathrm{n}\boldsymbol{x}_0$. Forklar hvorfor det ville vært fordelaktig dersom $\boldsymbol{x}_0$ hadde vært en egenvektor til A.

d) Vi skal nå foreta et basisskifte fra standardbasis til en basis gitt ved to av matrisens egenvektorer. Velg en egenvektor fra hvert av egenvektorsettene. Angi koordinatskiftematrisen U som du da får, og finn koordinatene til $\boldsymbol{x}_0$ i denne nye basisen.

e) Bruk det du fant i spørsmål d) til å finne et uttrykk for e_n og l_n, altså andelen sykler ved de to stedene etter n døgn.
Tips: Husk at $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{U}\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{\chi}_1 + c_2\boldsymbol{\chi}_2$, hvor c_1 og c_2 er koordinatene til $\boldsymbol{x}_0$ i den nye basisen du fant i spørsmål d), og $\boldsymbol{\chi}_1$ og $\boldsymbol{\chi}_2$ er egenvektorene du har valgt.

f) Finn hvor stor andel av syklene som i det lange løp vil befinne seg ved henholdsvis Ekenäs og Långegärde (etter at alle syklene er innlevert på kvelden).

Oppgave 6 (15 %)

Finn den generelle løsningen av følgende differensialligning:

$$y'' + 2y' + 5y = 2\cos t + 4\sin t$$

Oppgave 7 (15 %)

Bruk laplacetransformasjonen til å løse følgende initialverdiproblem:

$$y'' + y' - 6y = 13\delta(t) \qquad y(0) = 0,\, y'(0) = -3$$

CFH, 8. desember 2017

Matematikk 1

Laplacetransformasjonen – formelliste

Definisjon av laplacetransformasjonen: $Y(s) = \mathcal{L}(y(t)) = \int_0^\infty y(t)\, e^{-st} dt$

$y(t)$	$Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$	Konvergensområde/ kommentar
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
$t^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$t^n e^{at} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$s > a$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$s > a$
$y(t)\, e^{at}$	$Y(s-a)$	
$u(t-a)$	$\frac{1}{s} e^{-as}$	Enhetssprang
$y(t-a)\, u(t-a)$	$e^{-as}\, Y(s)$	
$\delta(t-a)$	e^{-as}	Enhetspuls (Diracs delta)

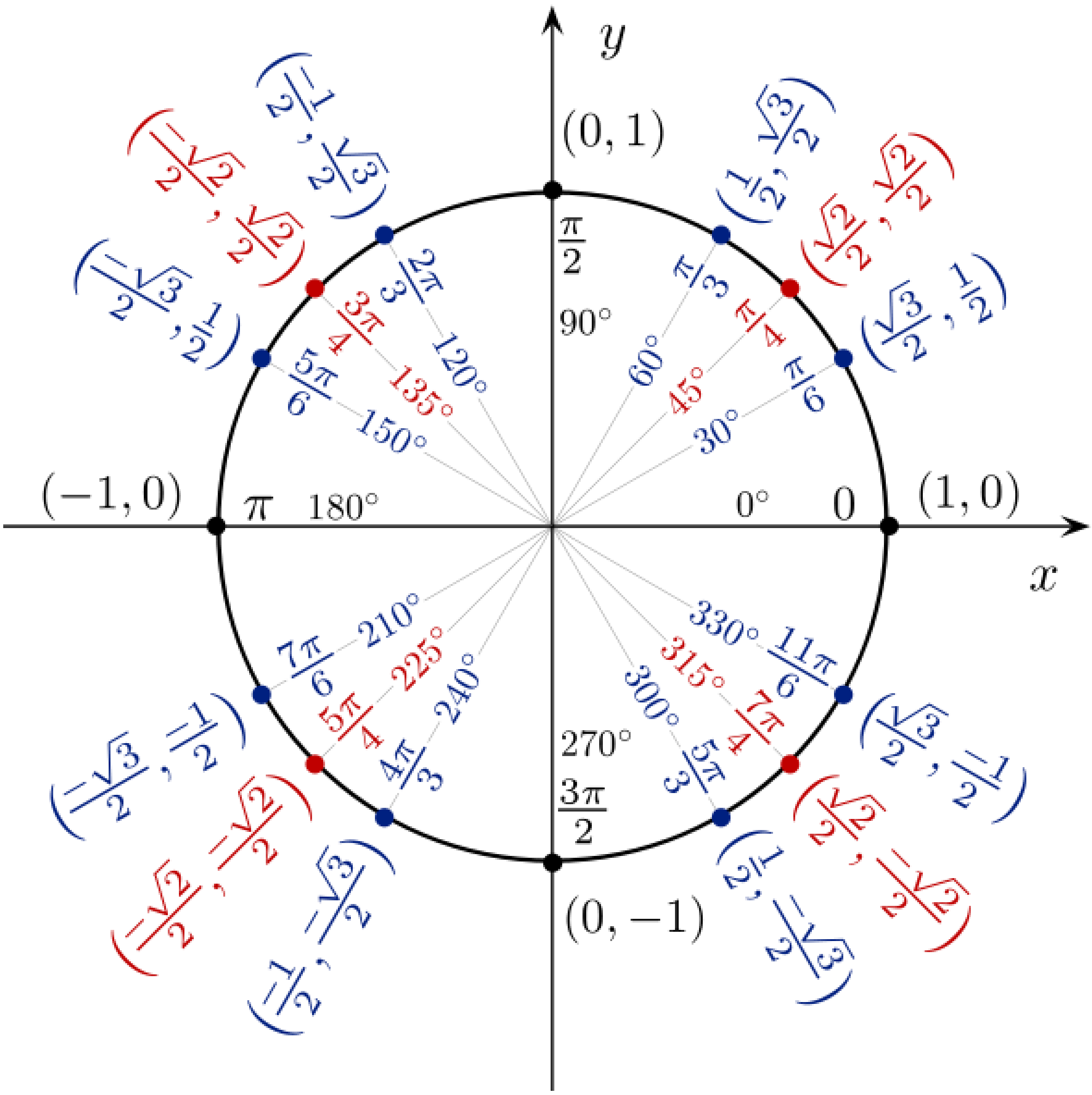
Derivasjon og integrasjon:

$$\mathcal{L}\left(y'(t)\right) = sY - y(0)$$

$$\mathcal{L}\left(y''(t)\right) = s^2 Y - sy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t y(u)\, du\right) = \frac{1}{s}\, Y$$

Vedlegg 2: Eksakte trigonometriske verdier for noen vinkler



Høgskolen i Østfold

Løsning av differensialligninger – en oppsummering

1. **Konstante koeffisienter foran *y*, *y*' og *y*'' (lineære ligninger).**
   a. Homogen ligning (høyre side er 0)
   - Løses ved hjelp av karakteristisk ligning. Vi får ett av tre tilfeller avhengig av løsningen av den karakteristiske ligningen:
     - To reelle løsninger, λ_1 og λ_2. Den generelle løsningen av diff.lign:
       $$y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$
     - Én reell løsning, λ. Den generelle løsningen av diff.lign:
       $$y = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$$
     - To komplekse løsninger, $\lambda = \alpha \pm \beta i$. Den generelle løsningen:
       $$y = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$$

   b. Inhomogen ligning (høyre side er ikke 0)
   - Finn først løsningen av den tilhørende homogene ligningen, y_h. Denne løses som i punkt a.
   - Finn så en partikulær løsning y_p av den inhomogene ligningen ved å anta at y_p er av samme form som høyre side i ligningen (sjekk om den må oppgraderes). Sett inn den y_p du gjetter på i differensialligningen og finn på den måten de ubestemte konstantene i denne løsningen.
   - Den generelle løsningen av den inhomogene ligningen er gitt ved
     $$y = y_h + y_p$$

2. **Variable koeffisienter foran *y* og/eller *y*'.**
   a. Dersom ligningen kan separeres: Løses ved å separere, integrere og løse med hensyn på *y*.
   b. Dersom ligningen ikke kan separeres (men er lineær): Bring ligningen på standard form, altså en form der faktoren foran y' er 1. Formen skal altså være
   $$y' + p(t)y = r(t)$$
   Finn så den integrerende faktor $e^{\int p(t)dt}$ og gang hele ligningen med denne. Da kan du forenkle venstre side i ligningen og skrive den som den deriverte av et produkt, og kan derfor enkelt integrere den.

Ubestemte konstanter
Ubestemte konstanter i den generelle løsningen finnes helt til slutt ved hjelp av initialbetingelser/grensebetingelser.