Høgskolen i Østfold

EKSAMEN

Emnekode:	Emnenavn:
ITF10705	Matematikk for IT
Dato: 14. desember 2016	**Eksamenstid:** 09.00 – 13.00
Hjelpemidler: - To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. Kalkulator er **ikke tillatt**.	**Faglærer:** Christian F Heide

Om eksamensoppgaven og poengberegning:

Oppgavesettet består av 7 sider inklusiv denne forsiden og to sider med vedlegg. Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 12 oppgaver med totalt 15 deloppgaver. Ved sensur vil alle deloppgaver telle like mye.

Der det er mulig skal du:

- **Vise utregninger** og hvordan du kommer fram til svarene.
- **Begrunne dine svar**, selv om dette ikke er eksplisitt sagt i hvert spørsmål.

Sensurfrist:

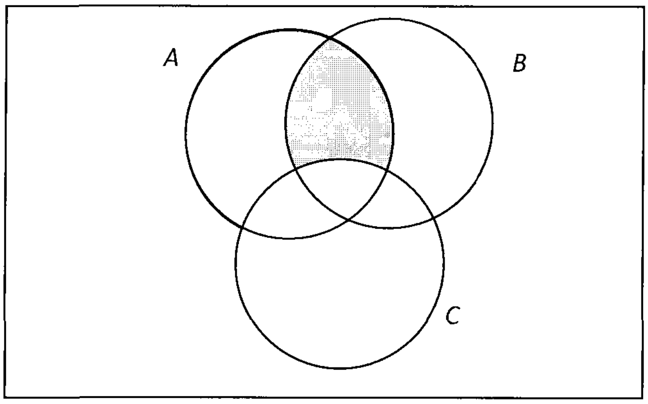
12. januar 2017

Karakterene er tilgjengelige for studenter på Studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. www.hiof.no/studentweb

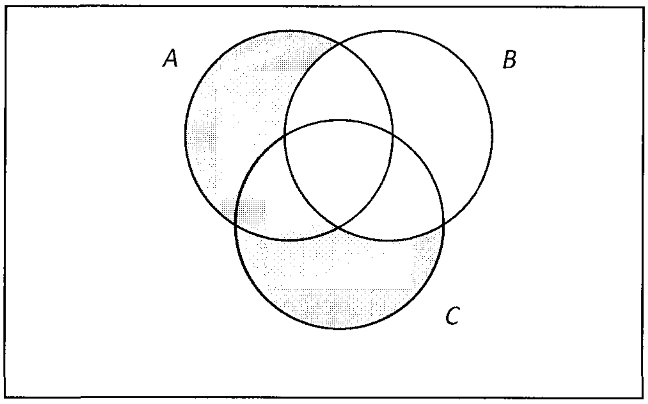
Oppgave 1

Gitt tre mengder, A, B og C som vist i venndiagrammene nedenfor. Angi de gråfargede mengdene ved hjelp av mengdeoperatorer (som snitt og union). (Disse to spørsmålene teller som én deloppgave til sammen).

i)



ii)



Oppgave 2

Mengdedifferanse kan defineres slik: $A - B = A \cap \overline{B}$

Benytt dette sammen med lovene på vedlagte ark til å vise at

$$\overline{\overline{A} \cup B} = A - B$$

Bruk kun én lov i hver trinn, og angi for hvert trinn hvilken lov du bruker.

Oppgave 3
Konverter det binære tallet 10111011010 til det heksadesimale tallsystemet (altså tallsystemet med grunntall 16).

Oppgave 4
Benytt sannhetstabeller til å undersøke om følgende utsagn er logisk ekvivalente:

i) $(p \wedge \neg q) \rightarrow q$

ii) $(p \rightarrow \neg q) \vee (p \vee \neg q)$

Oppgave 5
Bruk induksjonsbevis til å vise at følgende gjelder for alle $n \in \mathbb{Z}^{+} = \{1, 2, 3, \ldots\}$:

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

Oppgave 6
Gitt en funksjon $f : A \rightarrow B$.

Anta at f er injektiv, men ikke nødvendigvis surjektiv. Hvilke av følgende påstander er da korrekte. Begrunn svaret.

(i) $|A| < |B|$
(ii) $|A| \leq |B|$
(iii) $|A| = |B|$
(iv) $|A| \geq |B|$
(v) $|A| > |B|$

Oppgave 7
Lag en endelig tilstandsmaskin med binær inngang og utgang som gir 1-er ut når inndatasymbolet den leser er likt det foregående inndatasymbolet, og 0-er ut ellers.

For eksempel skal inndatastrengen 0001100 gi følgende ut: 0110101.

Oppgave 8
Gitt en rettet graf $G = (V, E)$ med nodemengde

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

Kantmengden er gitt av følgende nabomatrise:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Tegn den rettede grafen, G.

b) Vi kan betrakte kantmengden, E, som en relasjon på mengden V.
- **i.** Begrunn om denne relasjonen er refleksiv, symmetrisk, antisymmetrisk og/eller transitiv.
- **ii.** Benytt dette til å avgjøre om relasjonen er en ekvivalensrelasjon, en delvis ordning eller ingen av delene.

Oppgave 9

a) Finn den generelle (allmenne) løsningen av følgende differensligning:

$$y_n + 2y_{n-1} - 8y_{n-2} = 0$$

b) Finn den generelle løsningen av følgende differensligning:

$$y_n + 2y_{n-1} - 8y_{n-2} = 2n$$

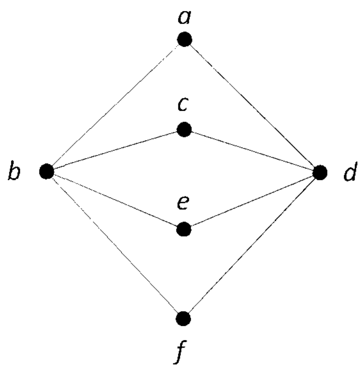
Oppgave 10
Gitt en grammatikk med startsymbol s, hvor mengden av ikke-avslutningssymboler er $N = \{s, t, u\}$ og mengden av avslutningssymboler er $T = \{0, 1\}$. Grammatikken har følgende produksjonsregler:

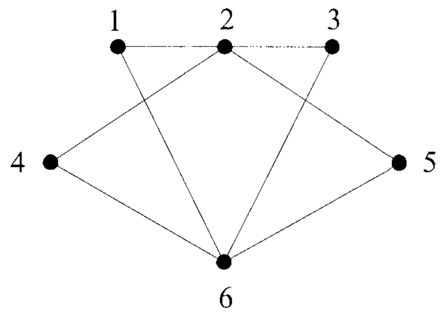
$$s \to tu$$
$$u \to 0t1$$
$$t \to 1$$
$$t \to \lambda$$

Er denne grammatikken kontekstfri, regulær eller ingen av delene? Begrunn svaret.

Oppgave 11

Nedenfor er grafene $G_1 = (V_1, E_1)$ og $G_2 = (V_2, E_2)$ tegnet.





$G_1 = (V_1, E_1)$ $\qquad\qquad$ $G_2 = (V_2, E_2)$

a) Er $G_1 = (V_1, E_1)$ en eulergraf? Begrunn svaret, og finn i så fall en eulersyklus.

b) Er G_1 og G_2 isomorfe? Begrunn svaret.
Dersom de er isomorfe må du også angi en isomorfi $f : V_1 \to V_2$.
Dersom de ikke er isomorfe må du forklare hvorfor de ikke er det.

Oppgave 12

En turingmaskin er definert ved følgende fem-tupler:

1. $(s_0, 0, s_0, 1, R)$
2. $(s_0, 1, s_1, 0, R)$
3. $(s_1, 0, s_0, 1, R)$
4. $(s_1, 1, s_1, 0, R)$
5. $(s_1, B, s_2, 1, L)$

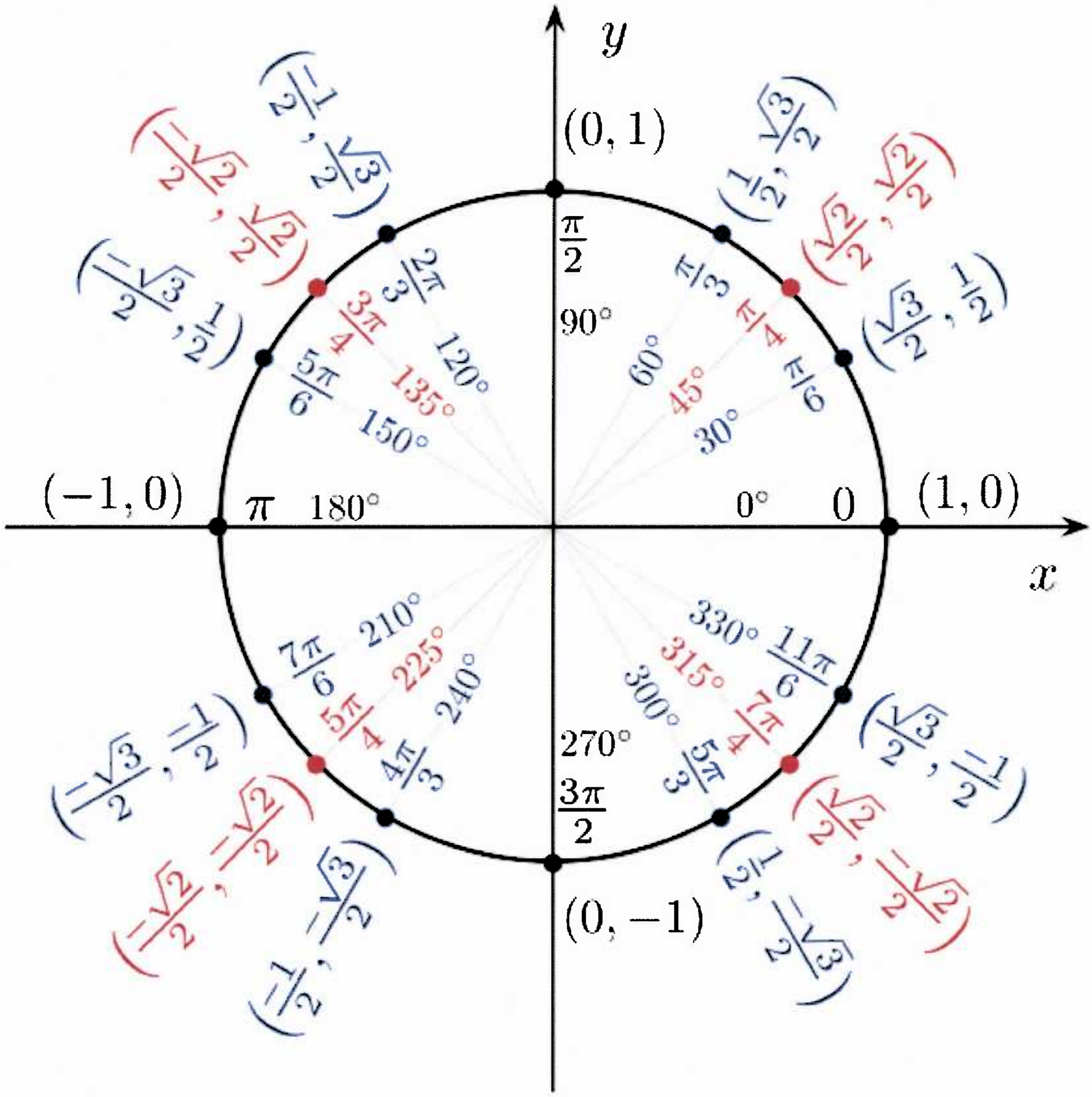
Anta nå at vi kjører turingmaskinen med en tape som ved oppstart ser slik ut:

...	B	0	1	B	...

i) Angi hvordan tapen ser ut etter kjøringen (altså hvilke symboler som står i de ulike cellene).

ii) Angi også hvilken av tilstandene turingmaskinen er i etter kjøringen.

Eksakte trigonometriske verdier for noen vinkler



Lover for logikk og mengder

Lov	Logikk	Mengder
1. Assosiative lover	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2. Kommutative lover	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
3.Distributive lover	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. De Morgans lover	$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
5. Idempotenslover	$p \vee p \Leftrightarrow p$ $p \wedge p \Leftrightarrow p$	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
6.Absorpsjonslover	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
7. Dobbel negasjon / Involusjonslov	$\neg (\neg p) \Leftrightarrow p$	$\overline{\overline{A}} = A$
8. Inverslover	$p \vee \neg p \Leftrightarrow S$ $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$	$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$
9. Identitetslover	$p \wedge S \Leftrightarrow p$ $p \vee F \Leftrightarrow p$	$A \cap U = A$ $A \cup \varnothing = A$
10. Dominanslover	$p \wedge F \Leftrightarrow F$ $p \vee S \Leftrightarrow S$	$A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cup U = U$
11. Implikasjon	$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	
12. Kontrapositive utsagn	$p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$	

Inklusjons- og eksklusjonsprinsippet

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$