Høgskolen i Østfold

EKSAMEN

Emnekode: IRF30014	Emnenavn: Matematikk 3
Dato: 19.12.2016 **Sensurfrist:** 16.01.2017	**Eksamenstid:** 0900-1300
Antall oppgavesider: 3 **Antall vedleggsider:** 0	**Faglærer:** Mikjel Thorsrud, mobil 41518610. **Oppgaven er kontrollert:** Ja

Hjelpemidler:

Godkjent kalkulator og alle skriftlige hjelpemidler.

Om eksamensoppgaven:

Oppgavesettet består av 10 deloppgaver som i utgangspunktet teller like mye.

Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig

Oppgave 1

a) Finn halvakser, eksentrisitet, fokuspunkter og styrelinjer til ellipsen

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Tegn en skisse av ellipsen, fokuspunkter og styrelinjer.

b) Vis at $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er egenvektor for matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 41 & 9 \\ 9 & 41 \end{bmatrix}$$

og skriv ned den tilhørende egenverdien λ_1. Begrunn at matrisen A er ortogonalt diagonaliserbar og finn matrisene P og D slik at $A = PDP^T$. Skriv ligningen for kjeglesnittet

$$41x^2 + 18xy + 41y^2 = 800$$

på standardform ved å innføre nye koordinater (u, v) definert ved matrisen P.

c) Bruk Lagrange multiplikatorer til å finne maksimum og minimum for funksjonen $f(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(y - x)$ på kurven

$$41x^2 + 18xy + 41y^2 = 800.$$

Det finnes en klar sammenheng mellom ekstremalverdiene til f og den store halvaksen til ellipsen i oppg. a). Forklar!

Oppgave 2 Regn ut

$$\int_0^1 \int_1^{x+1} (2y - x)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x.$$

Vis alle mellomregninger.

Oppgave 3 En halvkule med konstant massetetthet $\delta = 1$ okkuperer et området D i rommet gitt ved

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &\leq 4, \\ z &\geq 0. \end{aligned}$$

Beskriv området D i sfæriske koordinater og regn ut integralet

$$\iiint_D z\, \mathrm{d}V.$$

Bruk svaret til å regne ut koordinatene til halvkulens massesenter/tyngdepunkt.

Oppgave 4 Et vektorfelt $\mathbf{F}$ er definert

$$\mathbf{F} = 4y^2\mathbf{i} + 8xy\mathbf{j}.$$

La den lukkede kurven C være parallellogrammet med hjørner i punktene $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(4, 2)$ og $(1, 2)$ og omløpsretning mot klokka.

a) Avgjør om vektorfeltet er konservativt og bestem sirkulasjonen

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

b) Bruk Greens teorem (fluks-divergens form) til å beregne fluksen

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}s,$$

hvor $\mathbf{n}$ er enhetsnormal til C (orientert utover).

Oppgave 5 En ballong med masse m faller langs en rett linje mot bakken. Kreftene som virker på ballongen er gravitasjonskraften og luftmotstand. Gravitasjonskraften har størrelse mg, hvor $g = 9.8$ m/s^2 er tyngdeakselerasjonen, i retning mot bakken. Vi lar $y(t)$ være ballongens høyde over bakken ved tidspunkt t slik at hastighten $v = \frac{dy}{dt}$ er negativ når ballongen faller nedover. Vi antar en lineær modell for luftmotstanden med y-komponent $-bv$, hvor b er en positiv koeffisient. Når luftmotstanden og gravitasjonskraften balanserer hverandre vil ballongen falle med konstant fart. Dette er terminalhastigheten, v_b.

a) Bruk Newtons 2. lov til å bestemme terminalhastigheten v_b uttrykt ved b, g og m (merk at b og g, per definisjon, er positive størrelser). Utled bevegelsesligningene ved å bruke Newtons 2. lov og uttrykket for v_b:

$$\textbf{I.} \quad \frac{dy}{dt} = v,$$

$$\textbf{II.} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{g}{v_b}v - g.$$

b) La y_n og v_n være numeriske tilnærminger til $y(t_n)$ og $v(t_n)$, hvor $t_n = n \cdot \Delta t$. Bruk midtpunktmetoden til å uttrykke y_1 ved initialbetingelsene y_0 og v_0. Gjør tilsvarende for v_1 og vis at uttrykket er

$$v_1 = v_0 + g\left(\frac{v_0}{v_b} - 1\right)\Delta t + \frac{1}{2}\frac{g^2}{v_b}\left(\frac{v_0}{v_b} - 1\right)\Delta t^2.$$

Forklar hvorfor uttrykket for v_1 er konsistent med at v_b er terminalhastigheten.

c) Vis ved innsetting at

$$v(t) = v_b + Ce^{rt}$$

er en eksakt løsning av differensialligning **II.** i oppg. a) og bestem konstanten r uttrykt ved g og v_b. Bestem også integrasjonskonstanten C uttrykt ved v_0 og v_b. Sammenlign den eksakte løsningen i tidspunktet $t = \Delta t$ med uttrykket for v_1 i oppg. b) og vis at midtpunktmetoden er nøyaktig til andre orden i Δt.
Vi minner om Taylor-rekken til e^x i punktet $x = 0$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots$$