Høgskolen i Østfold

EKSAMEN

Emnekode: **ITF10705**	Emne: **Matematikk for IT**
Dato: **15. desember 2015**	Eksamenstid: 09.00 til 13.00
Hjelpemidler: To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. Kalkulator er **ikke tillatt**.	Faglærer: Christian F Heide

Eksamensoppgaven:
Oppgavesettet består av 7 sider inklusiv denne forsiden og et vedlegg på én side. Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 15 oppgaver. Ved sensur vil alle de 15 oppgavene telle like mye med unntak av oppgave 9 som teller som to oppgaver. I oppgaver med delspørsmål, vil krevende og mer omfattende delspørsmål kunne telle mer enn enkle delspørsmål.

Der det er mulig skal du:
- **vise utregninger** og hvordan du kommer fram til svarene
- **begrunne dine svar**, selv om dette ikke er eksplisitt sagt i hvert spørsmål

Sensurdato: Torsdag 14. januar 2016

Karakterene er tilgjengelige for studenter på studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. Følg instruksjoner gitt på: www.hiof.no/studentweb

Oppgave 1

Anta at universet i denne oppgaven er alle katter i verden.
Følgende predikater er definert:

$H(x)$: x har hale
$M(x)$: x fanger mus

Benytt disse predikatene sammen med kvantorer ($\exists$ og $\forall$) til å uttrykke følgende:

a) Det finnes minst en katt som ikke har hale.

b) Alle katter som ikke har hale fanger mus.

Oppgave 2

a) Konverter binærtallet 10001011101101 til heksadesimalt.

b) Konverter desimaltallet 47 til binært.

Oppgave 3

a) Benytt venndiagram til å vise at $B - A = \overline{A} \cap B$.

b) Bruk resultatet i oppgave a, altså at $B - A = \overline{A} \cap B$, sammen med lovene på vedlagte ark til å vise at

$$A - (A - B)$$

kan forenkles til

$$A \cap B\,.$$

Bruk kun én lov i hvert trinn og angi hvilken lov du bruker.

Oppgave 4

Bruk sannhetstabeller til å undersøke om følgende sammensatte utsagn er en tautologi:

$$(p \to q) \vee (\neg p \to r)$$

Oppgave 5

Du skal bevise utsagnet

Hvis $3n + 1$ er et partall, så er n et oddetall.

a) Hva er det kontrapositive utsagnet til det gitte utsagnet.

b) Bruk kontrapositivt bevis til å bevise utsagnet «Hvis $3n + 1$ er et partall, så er n et oddetall».

Oppgave 6

Bruk induksjonsbevis til å vise at følgende gjelder for alle $n \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Oppgave 7

Ved IT-studiet ved en høgskole, var det 67 studenter som tok eksamen i minst ett av fagene matematikk, programmering og databaser. 56 studenter tok eksamen i matematikk, 55 tok eksamen i programmering, mens 53 tok eksamen i databaser. 46 tok eksamen i både matematikk og programmering. Det var like mange som tok eksamen i både matematikk og databaser som dem som tok eksamen i både programmering og databaser. 39 studenter tok eksamen i alle tre fagene.

Hvor mange tok eksamen i både matematikk og databaser?

Oppgave 8

På hvor mange måter er det mulig å lage en komite som består av tre jenter og tre gutter i en skoleklasse med 12 jenter og 14 gutter?

(Siden kalkulator ikke er tillatt på denne eksamen, trenger du ikke å regne ut svaret, men bare sette opp hvordan det skal regnes ut og forkorte brøken du får mest mulig.)

Oppgave 9 (teller som to oppgaver)

a) Finn den generelle (allmenne) løsningen til følgende differensligning:

$$y_n + 4y_{n-1} + 4y_{n-2} = 0$$

b) Finn den generelle (allmenne) løsningen til følgende differensligning:

$$y_n + 4y_{n-1} + 4y_{n-2} = 9n + 6$$

Merk at venstre side av denne differensligningen er lik venstre side av ligningen i spørsmål a.

c) Finn konstantene som inngår i løsningen til oppgave b når startbetingelsene er $y_0 = 4$ og $y_1 = -7$, og skriv opp den løsningen du da får.

Oppgave 10

En bitstreng sies å ha *like paritet* dersom antall 1-ere i bitstrengen er et partall.

Konstruer en endelig automat (tilstandsmaskin uten utgang) som gjenkjenner alle ikke-tomme strenger som har like paritet.

Husk at 0 regnes som et partall.

Oppgave 11

Relasjonen R på mengden $A = \{ a, b, c, d\}$ er gitt ved

$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, d), (c, a), (c, c), (c, d), (d, b), (d, c), (d, d)\}$

a) Hvilke av egenskapene *refleksiv, symmetrisk*, *antisymmetrisk* og *transitiv* har denne relasjonen? Begrunn svaret for hver av egenskapene.

b) Benytt disse egenskapene til å begrunne om relasjonen er en ekvivalensrelasjon, en delvis ordning, en totalordning eller ingen av delene.

Oppgave 12

a) Gitt en relasjon fra en mengde A til en mengde B.
Forklar hvilke krav må stilles til denne relasjonen for at den skal være en funksjon.
Forklar også hva som skal til for at funksjonen skal være injektiv og surjektiv.

b) Gitt to mengder A og B, og en funksjon $f : A \to B$.
Anta at f er surjektiv, men ikke nødvendigvis injektiv. Hvilke av følgende påstander er da korrekte. Begrunn svaret.

(i) $|A| < |B|$

(ii) $|A| \leq |B|$

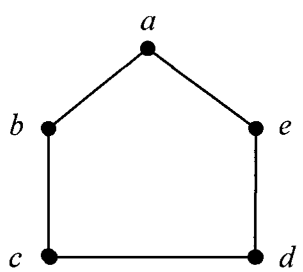
(iii) $|A| = |B|$

(iv) $|A| \geq |B|$

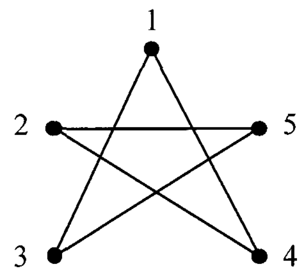
(v) $|A| > |B|$

Oppgave 13

Nedenfor er grafene $G_1 = (V_1, E_1)$ og $G_2 = (V_2, E_2)$ tegnet.



$G_1 = (V_1, E_1)$



$G_2 = (V_2, E_2)$

Er G_1 og G_2 isomorfe? Begrunn svaret.
Dersom de er isomorfe må du også angi en isomorfi $f : V_1 \to V_2$.
Dersom de ikke er isomorfe må du forklare hvorfor de ikke er det.

Oppgave 14

En grammatikk er gitt ved følgende mengder og produksjonsregler:

$N = \{ s, t, u\}$ $\qquad$ $T = \{ a, b\}$

i) $s \rightarrow at$
ii) $at \rightarrow u$
iii) $u \rightarrow at$
iv) $t \rightarrow b$

Er dette en kontekstfri grammatikk, en regulær grammatikk eller ingen av delene? Svaret må begrunnes.

Oppgave 15

Gitt matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Finn matriseproduktene AB og BA dersom de eksisterer.

Lover for logikk og mengder

Lov	Logikk	Mengder
1. Assosiative lover	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2. Kommutative lover	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
3.Distributive lover	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. De Morgans lover	$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
5. Idempotenslover	$p \vee p \Leftrightarrow p$ $p \wedge p \Leftrightarrow p$	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
6.Absorpsjonslover	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
7. Dobbel negasjon / Involusjonslov	$\neg (\neg p) \Leftrightarrow p$	$\overline{\overline{A}} = A$
8. Inverslover	$p \vee \neg p \Leftrightarrow S$ $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$	$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$
9. Identitetslover	$p \wedge S \Leftrightarrow p$ $p \vee F \Leftrightarrow p$	$A \cap U = A$ $A \cup \varnothing = A$
10. Dominanslover	$p \wedge F \Leftrightarrow F$ $p \vee S \Leftrightarrow S$	$A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cup U = U$
11. Implikasjon	$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	
12. Kontrapositive utsagn	$p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$	

Inklusjons- og eksklusjonsprinsippet

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$