Høgskolen i Østfold

EKSAMEN

Emnekode:	Emnenavn:
ITD15013	Matematikk 1 – andre deleksamen
Dato:	**Eksamenstid:**
18. mai 2016	09.00 – 12.00
Hjelpemidler:	**Faglærer:**
- To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. - Formelhefte. Kalkulator er **ikke** tillatt.	Christian F Heide

Om eksamensoppgaven og poengberegning:

Oppgavesettet består av 6 sider inklusiv denne forsiden og to vedlegg. Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 7 oppgaver med i alt 11 deloppgaver. Ved sensur vil alle deloppgaver telle omtrent like mye.

Der det er mulig skal du:

- vise utregninger og hvordan du kommer fram til svarene
- begrunne dine svar

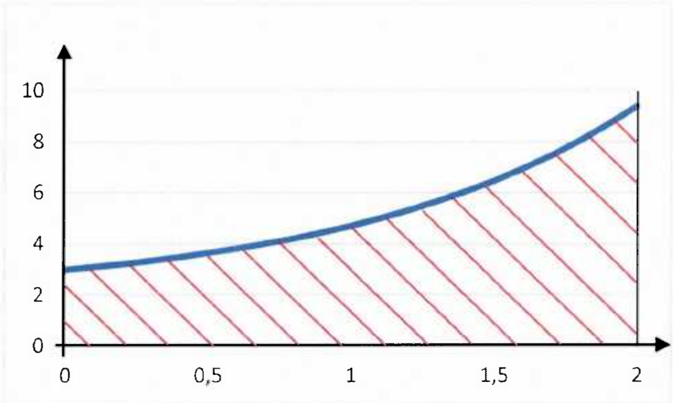
Sensurfrist:

8. juni 2016

Karakterene er tilgjengelige for studenter på Studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. www.hiof.no/studentweb

Oppgave 1

Figuren under viser grafen til funksjonen $f(x) = 2 + e^{\frac{1}{2}x}$.



a) Finn arealet av flaten under denne grafen mellom $x = 0$ og $x = 2$, altså arealet av det skraverte området.

b) Den skraverte flaten dreies om y-aksen. Finn volumet av det omdreiningslegemet som da framkommer.

Oppgave 2

Begrunn at følgende rekke konvergerer, og finn summen:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{3^n} + \frac{2}{4^n}\right) = 3 + \frac{1}{6} + \frac{17}{72} - \frac{5}{864} + \cdots$$

Oppgave 3

La $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ og $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ være to basiser for det euklidske rommet $\mathbb{R}^2$.

Gitt følgende vektor i basis B:

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Finn koordinatene til denne vektoren både i standardbasis og i basis A.

Oppgave 4
Gitt følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

Den reduserte trappeformen til A er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Finn en basis for nullrommet til A.

b) Finn en basis for kolonnerommet til A.

c)

i) Begrunn at kolonnevektorene i matrise A lineært avhengige.

ii) Uttrykk den første kolonnevektoren som en lineærkombinasjon av de to andre.

Oppgave 5
Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

og vektorene

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Matrisen A representerer en lineærtransformasjon, T. Finn bildet av vektoren $2\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ under transformasjonen T (altså: hvordan blir vektoren etter transformasjonen).

b) Finn egenverdiene og egenvektorsettene til lineærtransformasjon T.

Oppgave 6
Finn løsningen til følgende differensialligning med grenseverdien $y(0) = 0$.

$$y' + (\cos x)y = 2xe^{-\sin x}$$

Oppgave 7
Bruk laplacetransformasjonen til å løse følgende initialverdiproblem:

$$y'' + y' - 6y = 2\delta(t), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -10$$

Vedlegg 1: Laplacetransformasjonen – formelliste

Definisjon av laplacetransformasjonen: $Y(s) = \mathcal{L}(y(t)) = \int_0^{\infty} y(t)\, e^{-st} dt$

$y(t)$	$Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$	Konvergensområde/ kommentar
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
$t^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$t^n e^{at} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$s > a$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$s > a$
$y(t)\, e^{at}$	$Y(s-a)$	
$u(t-a)$	$\frac{1}{s} e^{-as}$	Enhetssprang
$y(t-a)\, u(t-a)$	$e^{-as}\, Y(s)$	
$\delta(t-a)$	e^{-as}	Enhetspuls (Diracs delta)

Derivasjon og integrasjon:

$$\mathcal{L}\left(y'(t)\right) = sY - y(0)$$

$$\mathcal{L}\left(y''(t)\right) = s^2 Y - sy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t y(u)\, du\right) = \frac{1}{s} Y$$

Vedlegg 2: Eksakte trigonometriske verdier for noen vinkler