Høgskolen i Østfold

EKSAMEN

Emnekode:	Emne:	
ITF10705	**Matematikk for IT**	
Dato: **15. desember 2014**	Eksamenstid: kl 09.00 til kl 13.00	
Hjelpemidler: To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. Kalkulator er **ikke tillatt.**		Faglærer: Christian F Heide

Eksamensoppgaven:
Oppgavesettet består av 5 sider inklusiv denne forsiden og et vedlegg på én side.
Kontroller at oppgaven er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 16 oppgaver. Ved sensur vil alle oppgaver telle like mye med unntak av oppgave 6 som teller som to oppgaver.

Der det er mulig skal du:

- **vise utregninger** og hvordan du kommer fram til svarene
- **begrunne dine svar**, selv om dette ikke er eksplisitt sagt i hvert spørsmål

Sensurdato: Torsdag 15. januar 2015

Karakterene er tilgjengelige for studenter på studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. Følg instruksjoner gitt på: www.hiof.no/studentweb

Oppgave 1
En relasjon på mengden

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

er definert ved følgende relasjonsmengde:

$$R = \{(a, b), (b, a), (b, d), (b, e), (d, a), (c, e), (e, c), (e, e)\}$$

Er denne relasjonen refleksiv, symmetrisk, antisymmetrisk og/eller transitiv? Begrunn svaret.

Oppgave 2
Gitt tre ikke-disjunkte mengder A, B og C. Bruk venndiagram til å skissere følgende mengde:

$$((A \cap C) \cup B) - (B \cap C)$$

Oppgave 3
Forklar om følgende slutning benytter en av de tre gyldige slutningsreglene som er angitt i boka, og angi hvilken av disse slutningsreglene som i tilfelle er brukt:

> Hvis jeg er tørst så drikker jeg vann.
> Jeg er ikke tørst.
> Derfor drikker jeg ikke vann.

Oppgave 4
Tallene

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \ldots$$

kalles lucastallene. Denne tallfølgen er karakterisert ved at hvert ledd er summen av de to foregående leddene. Skriv en rekursiv definisjon for lucastallene.

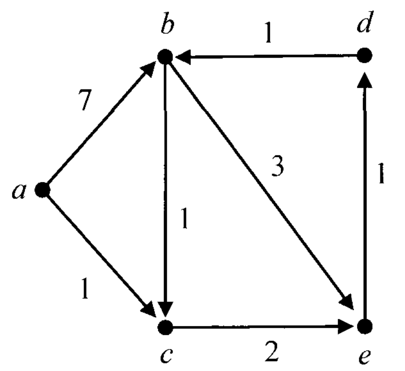
Oppgave 5
En gruppe mennesker består av 6 kvinner og 5 menn. Av denne gruppen skal det velges ut en komite på 5 personer som skal bestå av 3 kvinner og 2 menn. Hvor mange ulike slike komiteer kan en danne?

Oppgave 6 (teller som to oppgaver)
Løs følgende differensligning:

$$y_n - 6y_{n-1} + 9y_n = 8n$$

med $y_0 = 6$ og $y_1 = 14$.

Oppgave 7
Gitt følgende rettede og vektede graf. Benytt Dijkstras algoritme til å finne korteste vei (altså veier med minst vekt) fra node a til alle andre noder. Vis alle trinn i algoritmen og vis hvordan nodenes etiketter/merker oppdateres underveis.



Oppgave 8
Bruk sannhetstabeller til å undersøke om følgende uttrykk er en tautologi:

$$(p \wedge (q \vee (p \rightarrow r))) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee r)$$

Oppgave 9
Gitt følgende logiske utsagn:

$$\neg(\neg(p \rightarrow q) \vee p)$$

Bruk logikklovene på vedlagte ark til å finne hvilket av følgende utsagn dette er logisk ekvivalent med:

(i) p
(ii) $\neg p$
(iii) $p \vee q$
(iv) $p \wedge q$

Bruk kun en lov i hvert trinn og angi for hvert trinn hvilken lov du bruker.

Oppgave 10
Bruk induksjonsbevis til å vise at følgende gjelder for alle $n \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$$\frac{0 \cdot 1}{2} + \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \cdots + \frac{(n-1) \cdot n}{2} = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{6}$$

Oppgave 11
Gitt følgende predikat:

$$P(n): 3 \mid n$$

hvor $n \in \mathbb{Z}$. Bruk kvantorer og dette predikatet til å skrive følgende to utsagn:

i) Det finnes ikke noe heltall som er delelig med 3.

ii) 3 deler ikke alle heltall.

Angi også om hvert av utsagnene er sant eller falskt.

Oppgave 12
Anta at $n = \mathbb{Z}$. Benytt kontrapositivt bevis til å bevise at dersom $n^2 - 6n + 5$ er et partall så er n et oddetall.

Oppgave 13
Konverter tallet 41_{10} til binærtall.

Oppgave 14
Gitt en grammatikk med startsymbol s, hvor mengden av ikke-avslutningssymboler er $N = \{s, t, u\}$ og mengden av avslutningssymboler er $T = \{0, 1\}$. Grammatikken har følgende produksjonsregler:

$$s \to 1ut$$
$$s \to 0st$$
$$ut \to 1t$$
$$st \to 0t$$
$$t \to 0$$
$$u \to 1$$

Er denne grammatikken kontekstfri, regulær eller ingen av delene? Begrunn svaret.

Oppgave 15
Tegn tilstandsdiagrammet for en endelig automat (endelig tilstandsmaskin uten utgang) med inngangsalfabet $I = \{0, 1\}$ som gjenkjenner alle bitstrenger som **avsluttes** med 100.

Oppgave 16

Gitt to komplekse tall $z = 1 + 7i$ og $w = 1 - 3i$. Finn $\frac{z}{w}$. Skriv svaret på formen $a + bi$.

Lover for logikk og mengder

Lov	Logikk	Mengder
1. Assosiative lover	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2. Kommutative lover	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
3.Distributive lover	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. De Morgans lover	$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
5. Idempotenslover	$p \vee p \Leftrightarrow p$ $p \wedge p \Leftrightarrow p$	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
6.Absorpsjonslover	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
7. Dobbel negasjon / Involusjonslov	$\neg (\neg p) \Leftrightarrow p$	$\overline{\overline{A}} = A$
8. Inverslover	$p \vee \neg p \Leftrightarrow S$ $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$	$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$
9. Identitetslover	$p \wedge S \Leftrightarrow p$ $p \vee F \Leftrightarrow p$	$A \cap U = A$ $A \cup \varnothing = A$
10. Dominanslover	$p \wedge F \Leftrightarrow F$ $p \vee S \Leftrightarrow S$	$A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cup U = U$
11. Implikasjon	$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	
12. Kontrapositive utsagn	$p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$	

Inklusjons- og eksklusjonsprinsippet

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$