Høgskolen i Østfold

EKSAMEN – Ny og utsatt

Emnekode: **ITF10705**	Emne: **Matematikk for IT**
Dato: **8. juni 2015**	Eksamenstid: 09.00 – 13.00
Hjelpemidler: To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. Kalkulator er **ikke tillatt**.	Faglærer: Christian F Heide

Eksamensoppgaven:
Oppgavesettet består av 6 sider inklusiv denne forsiden og et vedlegg på én side. Kontroller at oppgavesettet er komplett.

Oppgavesettet består av 11 oppgaver med totalt 16 deloppgaver. Ved sensur vil alle deloppgaver telle like mye, med unntak av oppgave 3 som teller som to deloppgaver.

Der det er mulig skal du:
- **vise utregninger** og hvordan du kommer fram til svarene
- **begrunne dine svar**, selv om dette ikke er eksplisitt sagt i hvert spørsmål

Sensurdato: Tirsdag 30. juni 2015

Karakterene er tilgjengelige for studenter på studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. Følg instruksjoner gitt på: www.hiof.no/studentweb

Oppgave 1
Konverter følgende tall som er gitt i det heksadesimale tallsystemet til binærtall (altså et tall i totallsystemet):

$$EB9A_{16}$$

Oppgave 2
Gitt følgende mengder

$$A = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 12\}$$

$$B = \{2, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$$

$$C = \{0, 1, 2\}$$

a) Finn $C \cap (B - A)$

En relasjon R fra A til C er gitt ved at

$$(a, c) \in R \quad \text{dersom} \quad c \equiv a \pmod 3$$

hvor $a \in A$ og $c \in C$.

b) Skriv relasjonen R ved hjelp av relasjonsmengden (altså mengden av alle ordnede par som har denne relasjonen).

c) Forklar at relasjonen R er en funksjon, og begrunn deretter hvorvidt denne funksjonen er inverterbar eller ei.

d) En relasjon S på mengden C er gitt ved følgende relasjonsmengde:

$$S = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$$

Begrunn hvorvidt relasjonen S er refleksiv, symmetrisk, antisymmetrisk og/eller transitiv, og benytt dette til å begrunne om relasjonen er en ekvivalensrelasjon, en delvis ordning eller ingen av delene.

Oppgave 3 (teller som to oppgaver)
Løs følgende differensligning:

$$y_n = 2y_{n-1} + 3y_{n-2} - 8n + 4$$

med $y_0 = 2$ og $y_1 = 10$.

Oppgave 4
Gitt det komplekse tallet $z = 2e^{i\pi}$. Hva er realdelen og imaginærdelen til dette tallet?

Oppgave 5
Gitt følgende predikat:

$P(n)$: n er et primtall.

hvor $n \in Z^{+} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Forklar betydningen av hvert av følgende utsagn og angi det enkelte utsagns sannhetsverdi:

i) $\forall n\, P(n)$

ii) $\neg\exists\, n\, P(n)$

iii) $\exists n\, \neg P(n)$

iv) $\neg\forall\, n\, \neg\, P(n)$

Oppgave 6
Gitt følgende logiske utsagn:

$$[p \rightarrow (q \wedge p)] \vee \neg p$$

Benytt lovene i logikk gitt på vedlegget til å finne hvilket av følgende utsagn dette er logisk ekvivalent med:

i) $\neg p \vee \neg q$
ii) $\neg p \vee q$
iii) $p \wedge q$
iv) p

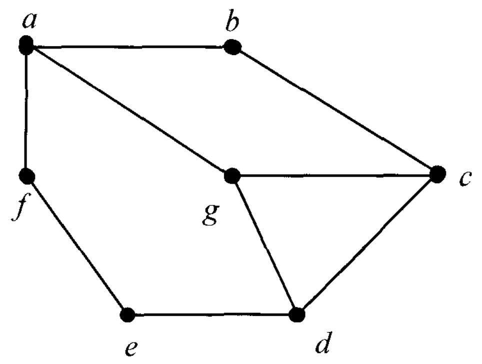
Bruk kun én lov i hvert trinn og angi for hvert trinn hvilken lov du bruker.

Oppgave 7
Bruk induksjonsbevis til å vise at følgende gjelder for alle $n \in Z^{+} = \{1, 2, 3, \ldots\}$:

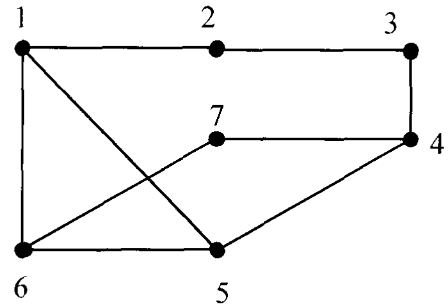
$$1 \cdot 3^{1} + 2 \cdot 3^{2} + 3 \cdot 3^{3} + 4 \cdot 3^{4} + \cdots + n \cdot 3^{n} = \frac{(2n-1) \cdot 3^{n+1} + 3}{4}$$

Oppgave 8

Nedenfor er grafene $G_1 = (V_1, E_1)$ og $G_2 = (V_2, E_2)$ tegnet.



$G_1 = (V_1, E_1)$



$G_2 = (V_2, E_2)$

Er G_1 og G_2 isomorfe?

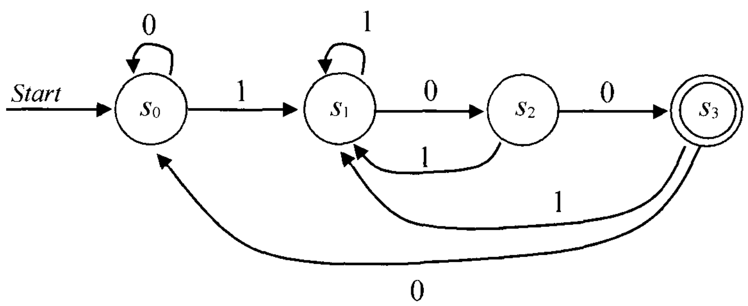
Dersom de er isomorfe, begrunn dette og angi en isomorfi $f : V_1 \to V_2$.

Dersom de ikke er isomorfe, begrunn hvorfor de ikke er det.

Oppgave 9

a) Tegn tilstandsdiagrammet for en endelig automat (endelig tilstandsmaskin uten utgang) med inngangsalfabet $I = \{0, 1\}$ som gjenkjenner alle bitstrenger som har 1 som aller første bit og som blant de resterende bit har et odde antall 0-er.

b) Figuren nedenfor viser tilstandsdiagrammet til en endelig automat med inngangsalfabet $I = \{0, 1\}$. Beskriv produksjonsreglene til grammatikken som genererer språket som automaten gjenkjenner/aksepterer.



Oppgave 10

Gitt et heltall $n \in Z = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$.

Bruk kontrapositivt bevis til å bevise at dersom $n^3 + 3$ er et partall, så er n et oddetall.

Oppgave 11

Gitt matrisene A og C:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Videre gitt en vektor $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Finn matriseproduktene AC og CA dersom de eksisterer.

b)

i. Finn determinanten til matrise A.

ii. Bruk determinanten til å avgjøre om ligningssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har en løsning. Du trenger ikke å regne ut en eventuell løsning til ligningssystemet.

Lover for logikk og mengder

Lov	Logikk	Mengder
1. Assosiative lover	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2. Kommutative lover	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
3.Distributive lover	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. De Morgans lover	$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
5. Idempotenslover	$p \vee p \Leftrightarrow p$ $p \wedge p \Leftrightarrow p$	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
6.Absorpsjonslover	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
7. Dobbel negasjon / Involusjonslov	$\neg (\neg p) \Leftrightarrow p$	$\overline{\overline{A}} = A$
8. Inverslover	$p \vee \neg p \Leftrightarrow S$ $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$	$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$
9. Identitetslover	$p \wedge S \Leftrightarrow p$ $p \vee F \Leftrightarrow p$	$A \cap U = A$ $A \cup \varnothing = A$
10. Dominanslover	$p \wedge F \Leftrightarrow F$ $p \vee S \Leftrightarrow S$	$A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cup U = U$
11. Implikasjon	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	
12. Kontrapositive utsagn	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$	

Inklusjons- og eksklusjonsprinsippet

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$