Høgskolen i Østfold

EKSAMEN – Ny og utsatt

Emnekode:	Emne:
ITD15013	**Matematikk 1 – andre deleksamen**
Dato: **6. januar 2015**	Eksamenstid: 09.00 – 12.00
Hjelpemidler: - To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. - Formelhefte. Kalkulator er **ikke tillatt**.	Faglærer: Christian F Heide

Eksamensoppgaven:
Oppgavesettet består av 6 sider inklusiv denne forsiden og to vedlegg. Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 9 oppgaver med i alt 12 deloppgaver. Ved sensur vil alle deloppgaver telle like mye.

Der det er mulig skal du:

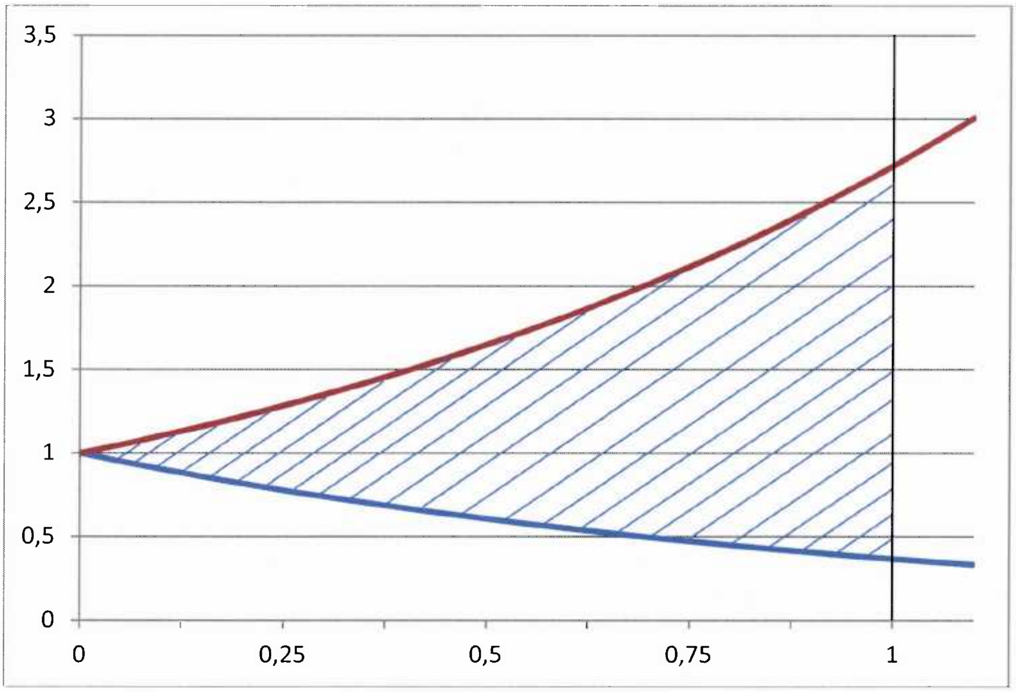
- **vise utregninger** og hvordan du kommer fram til svarene
- **begrunne dine svar**, selv om dette ikke er eksplisitt sagt i hvert spørsmål

Sensurdato: 27. januar 2015

Karakterene er tilgjengelige for studenter på studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. Følg instruksjoner gitt på: www.hiof.no/studentweb

Oppgave 1

Figuren under viser funksjonene e^{-x} (blå kurve) og e^{x} (rød kurve).



Finn arealet av området som ligger mellom disse kurvene og er avgrenset av de vertikale linjene $x = 0$ og $x = 1$ (altså det skraverte området på figuren).

Oppgave 2

Finn verdien av følgende uegentlige integral dersom det konvergerer:

$$\int_0^\infty e^{-2x}$$

Oppgave 3

Finn den generelle (allmenne) løsningen av følgende differensialligning:

$$y' - 3x^2 e^{-y} = 0$$

Oppgave 4

Finn løsningen på følgende initialverdiproblem:

$$y'' + 2y' + 2y = 3x^2 - 2x, \qquad y(0) = 16, \quad y'(0) = -12$$

Oppgave 5

a) En lineærtransformasjon T: $\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ er gitt ved

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Finn bildet av vektoren $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ under T.

b) Noen vektorer har den egenskap at de ikke endrer retning ved en transformasjon med lineærtransformasjonen T. Finn disse vektorene.

Oppgave 6

Gitt følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

a) Vis ved elementære rekkeoperasjoner at den reduserte trappeformen til denne matrisen er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og finn så alle løsninger $\boldsymbol{x}$ av ligningssystemet $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, hvor

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Finn en basis for rekkerommet og en basis for nullrommet til matrisen.

c) For matrise A, finn

i) rangen

ii) dimensjonen til kolonnerommet

iii) nulliteten

Oppgave 7
En ball slippes fra to meters høyde mot et gulv. Ballen spretter opp til en høyde som er $\frac{3}{4}$ av høyden den slippes fra, før den igjen faller mot gulvet og spretter på ny opp til $\frac{3}{4}$ av høyden den faller fra, osv.

Finn den totale vertikale distansen ballen tilbakelegger før den ligger i ro på gulvet.

(Vi ser bort fra fysiske begrensninger som for eksempel luftmotstand og det litt problematiske i at ballen matematisk sett spretter uendelig mange ganger før den ligger i ro i forhold til gulvet.)

Oppgave 8
Finn taylorpolynomet av grad 3 om $a = 0$ for funksjonen

$$f(x) = \sqrt{1-x}$$

Oppgave 9
Tegn grafen og finn deretter fourierrekken til følgende periodiske funksjon med periode 2π :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

Vedlegg 1: Laplacetransformasjonen – formelliste

Definisjon av laplacetransformasjonen:

$$Y(s) = \mathcal{L}(y(t)) = \int_0^\infty y(t)\, e^{-st} dt$$

$y(t)$	$Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$	Konvergensområde/ kommentar
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
$t^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$t^n e^{at} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$s > a$
$y(t)\, e^{at}$	$Y(s-a)$	
$u(t-a)$	$\frac{1}{s} e^{-as}$	Enhetssprang
$y(t-a)\, u(t-a)$	$e^{-as}\, Y(s)$	
$\delta(t-a)$	e^{-as}	Enhetspuls (Diracs delta)

Derivasjon og integrasjon:

$$\mathcal{L}\left(y'(t)\right) = sY - y(0)$$

$$\mathcal{L}\left(y''(t)\right) = s^2 Y - sy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t y(u)\, du\right) = \frac{1}{s} Y$$

Vedlegg 2: Eksakte trigonometriske verdier for noen vinkler