Høgskolen i Østfold

EKSAMEN

Emnekode:	Emne:	
ITD15013 og **ITD15012**	**Matematikk 1**	
Dato: **18. mai 2015**	Eksamenstid: 09.00 – 12.00	
Hjelpemidler: - To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. - Formelhefte. Kalkulator er **ikke tillatt**.		Faglærer: Christian F Heide

Eksamensoppgaven:
Oppgavesettet består av seks sider inklusiv denne forsiden og to vedlegg. Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

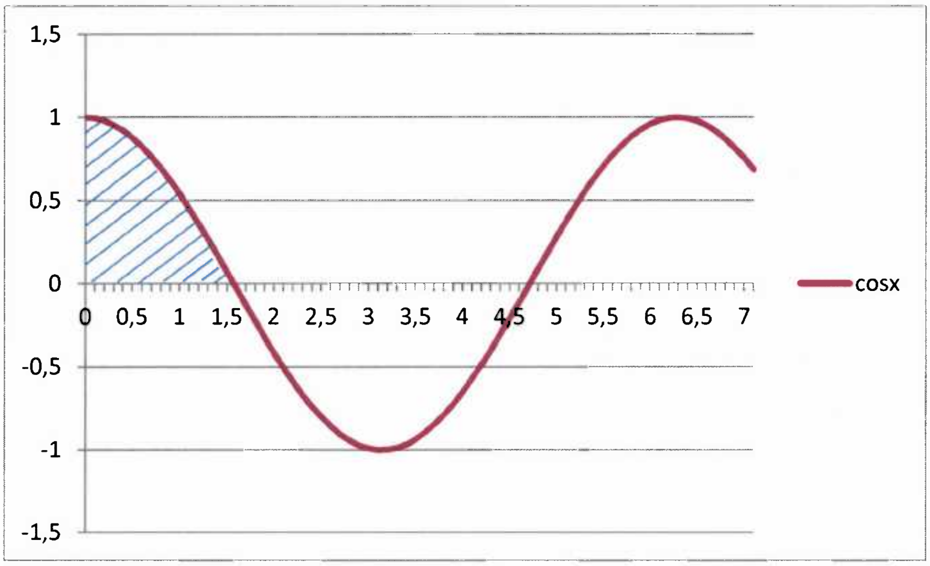
Oppgavesettet består av 8 oppgaver med i alt 11 delspørsmål. Ved sensur vil alle delspørsmål telle like mye.

Der det er mulig skal du:
- **vise utregninger** og hvordan du kommer fram til svarene
- **begrunne dine svar**, selv om dette ikke er eksplisitt sagt i hvert spørsmål

Sensurdato: 10. juni 2015

Karakterene er tilgjengelige for studenter på studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. Følg instruksjoner gitt på: www.hiof.no/studentweb

Oppgave 1
Figuren viser funksjonen $y = \cos x$.



a) Finn arealet av det skraverte området, altså arealet under grafen til cos x fra $x = 0$ til der grafen skjærer x-aksen.

b) Det skraverte området roteres om y-aksen. Finn volumet av det omdreiningslegemet som da framkommer.

Oppgave 2
Løs differensialligningen

$$xy' + 4y = x^3 - x \qquad x > 0$$

Oppgave 3
Løs differensialligningen

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

med grensebetingelsene $y(0) = 7$ og $y'(0) = 11$.

Oppgave 4
Bruk laplacetransformasjonen til å løse følgende initialverdiproblem, hvor $\delta(t)$ er en enhetspuls (Diracs delta):

$$y'' + 4y = \delta(t), \qquad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$$

Oppgave 5
Finn egenverdier og tilhørende egenvektorsett til følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Oppgave 6
Gitt en matrise

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Den reduserte trappformen til denne matrisen er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Danner kolonnevektorene i matrisen A en basis for R^4? Begrunn svaret.

b) Et vektorrom V er definert ved

$$V = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$$

Merk at disse vektorene er kolonnevektorene i matrisen A.

Finn en basis for V.

c) Finn en basis for nullrommet til matrise A.

Oppgave 7
Begrunn at følgende uendelige rekke konvergerer og finn summen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$$

Oppgave 8
Finn fourierrekken til den periodiske funksjonen $f(t)$ som har periode 2π og som er gitt ved:

$$f(t) = -t \qquad -\pi \le t < \pi$$

Vedlegg 1: Laplacetransformasjonen – formelliste

Definisjon av laplacetransformasjonen:

$$Y(s) = \mathcal{L}(y(t)) = \int_0^\infty y(t)\, e^{-st} dt$$

$y(t)$	$Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$	Konvergensområde/ kommentar
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
$t^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$t^n e^{at} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$s > a$
$y(t)\, e^{at}$	$Y(s-a)$	
$u(t-a)$	$\frac{1}{s} e^{-as}$	Enhetssprang
$y(t-a)\, u(t-a)$	$e^{-as}\, Y(s)$	
$\delta(t-a)$	e^{-as}	Enhetspuls (Diracs delta)

Derivasjon og integrasjon:

$$\mathcal{L}\,(y'(t)) = sY - y(0)$$

$$\mathcal{L}\,(y''(t)) = s^2 Y - sy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t y(u)\, du\right) = \frac{1}{s}\, Y$$

Vedlegg 2: Eksakte trigonometriske verdier for noen vinkler