Høgskolen i Østfold

EKSAMEN

Emnekode: **ITD15013**	Emne: **Matematikk 1**
Dato: **6. mai 2014**	Eksamenstid: 09.00 – 12.00
Hjelpemidler: - To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. - Formelhefte. Kalkulator er **ikke tillatt**.	Faglærer: Christian F Heide

Eksamensoppgaven:
Oppgavesettet består av seks sider inklusiv denne forsiden og to vedlegg. Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

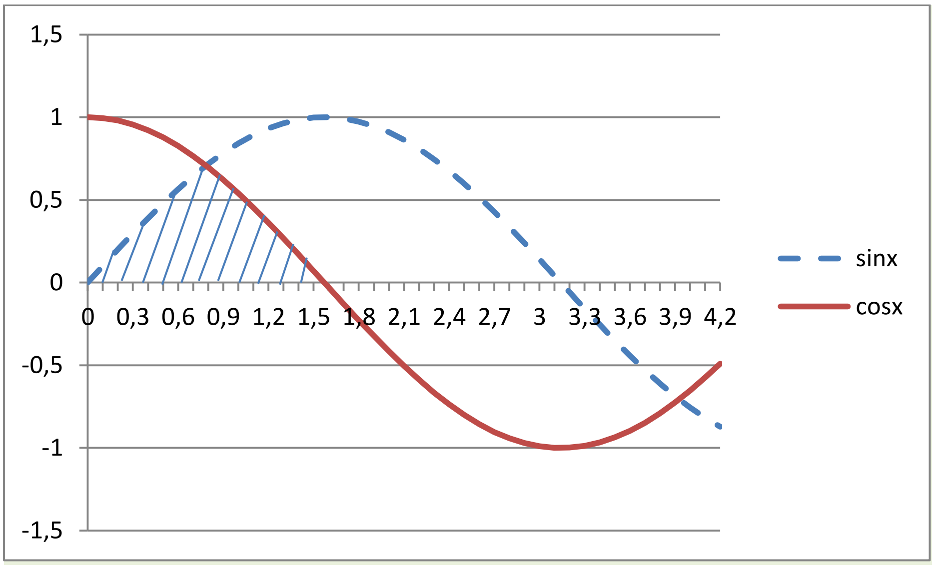
Oppgavesettet består av seks oppgaver med i alt 11 deloppgaver. Ved sensur vil alle deloppgaver telle omtrent like mye.

Der det er mulig skal du:
- **vise utregninger** og hvordan du kommer fram til svarene
- **begrunne dine svar**, selv om dette ikke er eksplisitt sagt i hvert spørsmål

Sensurdato: 28. mai 2014

Karakterene er tilgjengelige for studenter på studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. Følg instruksjoner gitt på: www.hiof.no/studentweb

Oppgave 1



Figuren viser grafene til sinus og cosinus. Finn arealet av det skraverte området. (Grafene skjærer hverandre i punktet $x = \frac{\pi}{4}$).

Oppgave 2

Løs følgende initialverdiproblem:

$$xy' - 2y = x^3 \qquad y(1) = 6, \quad x > 0$$

Oppgave 3

a) Den laplacetransformerte til en funksjon $f(t)$ er gitt ved:

$$F(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+1}$$

Finn $f(t)$, altså den inverse laplacetransformasjonen til $F(s)$.

b) Bruk laplacetransformasjon til å løse følgende initialverdiproblem:

$$y'' - y' - 2y = 3\delta(t-2) \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

hvor $\delta(t-2)$ er en enhetspuls (Diracs delta) ved $t = 2$.

Oppgave 4

Gitt følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & -14 \\ 3 & -7 & 8 & -5 \\ 3 & -9 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

a) Finn alle løsninger av ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

b)

- **i)** Forklar hva som menes med at vektorer er lineært avhengige eller uavhengige.
- **ii)** Er kolonnevektorene i A lineært uavhengige? Begrunn svaret.

c) Finn en basis for kolonnerommet og en basis for nullrommet til matrisen.

d) For matrise A, finn

- **i)** dimensjonen til kolonnerommet
- **ii)** rangen
- **iii)** nulliteten

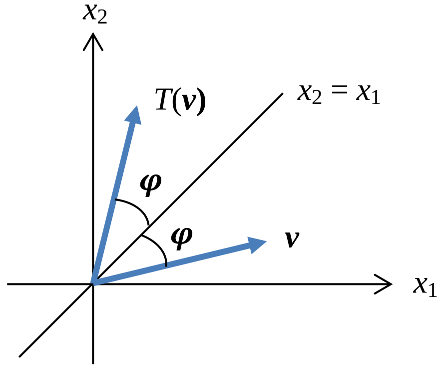
Oppgave 5

a) Gitt følgende matrise.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Finn matrisens egenverdier og de tilhørende egenvektorsettene.

b) En lineærtransformasjon T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ speiler vektorer om linjen $x_2 = x_1$ som figuren nedenfor viser. Hva er transformasjonens egenverdier og tilhørende egenvektorsett?



Oppgave 6

Finn verdien av følgende uegentlige integral dersom det konvergerer:

$$\int_4^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

Vedlegg 1: Laplacetransformasjonen – formelliste

Definisjon av laplacetransformasjonen:

$$Y(s) = \mathcal{L}(y(t)) = \int_0^\infty y(t)\, e^{-st} dt$$

$y(t)$	$Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$	Konvergensområde/ kommentar
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
$t^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$t^n e^{at} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$s > a$
$y(t)\, e^{at}$	$Y(s-a)$	
$u(t-a)$	$\frac{1}{s} e^{-as}$	Enhetssprang
$y(t-a)\, u(t-a)$	$e^{-as}\, Y(s)$	
$\delta(t-a)$	e^{-as}	Enhetspuls (Diracs delta)

Derivasjon og integrasjon:

$$\mathcal{L}\left(y'(t)\right) = sY - y(0)$$

$$\mathcal{L}\left(y''(t)\right) = s^2 Y - sy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t y(u)\, du\right) = \frac{1}{s} Y$$

Vedlegg 2: Eksakte trigonometriske verdier for noen vinkler