Høgskolen i Østfold

EKSAMEN

Emnekode:	Emnenavn:
IRB22515, IRBIO22013, IRE22518, IRM23116	Deleksamen i Statistikk
Dato: 07.11.19 Sensurfrist: 28.11.19	Eksamenstid: 09.00 – 12.00
Antall oppgavesider: 6 Antall vedleggsider: 9	Faglærer: Tore August Kro Oppgaven er kontrollert: Ja

Hjelpemidler:

Lærebok, to interne notater (begge Elise Øby 2015),

kalkulator av enhver type, godkjente formelsamlinger.

Om eksamensoppgaven:

Gjør alle oppgavene. Alle deloppgaver teller likt.

Vis alle utregninger.

Besvarelsen vurderes ut fra kvaliteten på begrunnelsene.

Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig

Høgskolen i Østfold
Avdeling for ingeniørfag

EKSAMEN
STATISTIKK **Lærer/telefon: Tore A. Kro, 900 22 321**

Deleksamen i Statistikk IRB22515, IRBIO22013 IRE22518, IRM23116	**Dato: 07.11.2019**	**Tid: 0900–1200**
Antall oppgavesider: 6	**Vedlegg: Ett internt notat, 9 sider, (Elise Øby, 2015)**	
Sensurfrist: 28.11.2020		
Hjelpemidler: Lærebok, to interne notater (begge Elise Øby 2015), kalkulator av enhver type, godkjente formelsamlinger.		
KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG		

Vis alle utregninger. Besvarelsen vurderes ut fra kvaliteten på begrunnelsene.

Oppgave 1. Ingeniørfirmaet KÅBY har lokalkontorer spredt utover hele Norge. Blant de ansatte er det tilsammen 336 bygningsingeniører. En intern spørreundersøkelse har avdekket at mange føler flyskam i forbindelse med jobbreiser. Spesielt gjelder dette 112 av firmaets bygningsingeniører. I desember arrangerer KÅBY en intern konferanse på Gardermoen om grønne bygg. Et utvalg på 56 bygningsingeniører skal delta på konferansen. La X være antallet bygningsingeniører på konferansen som har flyskam.

a) Hvilken fordeling har X? Finn $E(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ og $P(X = 20)$.

TU skal lage korte intervjuer om ingeniørers jobbreisevaner. KÅBY er bedt om å finne 4 bygningsingeniører som kan stille til intervju. La Y være antallet blant disse fire som har flyskam.

b) Er Y tilnærmet binomisk? Anslå sannsynligheten for at minst halvparten av de intervjuede KÅBY-ingeniørene har flyskam.

I Norge er det sysselsatt tilsammen 17340 bygningsingeniører.

c) La p være sannsynligheten for at en tilfeldig norsk bygningsingeniør har flyskam. Anta at de KÅBY-ansatte er et representativt utvalg for norske bygningsingeniører. Finn et 95%-konfidensintervall for sannsynligheten p. Oppgi også svaret som et 95%-spredningsintervall for antall norske bygningsingeniører med flyskam.

Oppgave 2. Henrik legger seg ikke til samme tid hver kveld. Han vil derfor kartlegge sine egne søvnvaner. I løpet av høsten noterer han ned antall timer søvn hver natt. Med utgangspunkt i disse dataene gjennomfører Henrik tre ulike statistiske undersøkelser. I det første forsøket vil han undersøke om han sover lite i gjennomsnitt. På en uke samler han disse målingene:

7,75	6,5	6,75	7,0	7,25	8,0	9,25

Tallene angir antall timer søvn som et desimaltall. Eksempelvis er 7,25 det samme som syv timer og ett kvarter.

a) Finn gjennomsnitt og standardavvik for datasettet.

b) Henrik synes målingene viser lite søvn. Han vil prøve å vise dette ved en hypotesetest. Han antar at målingene er normalfordelte. Gjennomfør en hypotesetest på signifikansnivå $\alpha = 0{,}05$ der den ene hypotesen er:

"Forventet antall timer søvn per natt er mindre enn 8 timer." $(\mu < 8)$

Egenrapportering gir ikke veldig nøyaktige målinger. Derfor anskaffer Henrik seg et søvnregistreringsapparat. Det andre forsøket Henrik gjennomfører er en sammenligning mellom egenrapporterte timer søvn versus målinger gjort med apparatet. På kalenderen for august måned samler han inn disse dataene:

Egenrapportert:				6,5	9,25	8	7,5
Søvnregistreringsapparat:				5,91	7,81	7,35	6,70
E:	5,5	6,75	7,25	7	8,75	7,75	8,5
S:	4,85	6,11	6,40	5,80	7,91	6,74	7,94
E:	7	6,75	7,75	7	6,75	8,25	9,25
S:	6,49	5,65	7,24	6,72	6,16	7,51	9,09
E:	7,75	6	6,25	7,25	7,75	8,5	8,25
S:	7,37	5,26	5,35	6,62	7,15	7,74	8,23
E:	8	8,5	6,25	4,75	6,5	10,5	
S:	7,63	7,77	5,35	3,84	5,66	9,97	

Henrik regner ut gjennomsnitt og standardavvik for hver av måleseriene. I tillegg finner han differansen for hver av dagene, og bestemmer gjennomsnittet og standardavviket for disse differansene.

	Egenrapportert	Søvnregistreringsapparat	Differanse
Gjennomsnitt	7,4758	6,7831	0,6927
Standardavvik	1,1978	1,2862	0,2929

c) Hva kalles denne typen datasett? Utfør en hypotesetest på signifikansnivå $\alpha = 0{,}05$ med disse hypotesene:

H_0: Forventningsverdiene til egenrapportert søvn og apparatregistrert søvn er like.

H_1: Forventningsverdiene til egenrapportert søvn og apparatregistrert søvn er ulike.

Sammen med vennene sine diskuterer Henrik søvneksperimentene. Ixi, Une og Frank blir så engasjerte at de vil være med på en sammenlignende studie. Det tredje forsøket er å undersøke om vennene har ulik forventet lengde på nattesøvnen. Det brukes bare egenrapporterte data fra natt til onsdager, for Henrik har sett at onsdagsmålingene synes å være normalfordelte. Frank mener at de to ukene han var på Gran Canaria ikke skal regnes med, og de andre godtar dette. Data fra september og oktober ble slik:

Henrik	7	6,5	6,75	7,5	6,75	5,25	6,75	6	7,5
Ixi	7,5	6,5	7	8,25	7,5	5,25	7,25	7,75	7,5
Unn	7	7,5	6,25	7,5	6,75	5,25	6,5	7	6
Frank	6,75	7,25	9	8,25	7,5	8	8		

Vi gjennomfører en ANOVA test på signifikansnivå $\alpha = 0{,}05$ og får følgende utskrift fra Excel:

Variansanalyse: en-faktor

SAMMENDRAG

Grupper	*Antall*	*Sum*	*Gjennomsnitt*	*Varians*
Henrik	9	60	6,666667	0,500000
Ixi	9	64,5	7,166667	0,750000
Une	9	59,75	6,638889	0,532986
Frank	7	54,75	7,821429	0,535714

Variansanalyse

Variasjonskilde	*SK*	*fg*	*GK*	*F*	*P-verdi*	*F-krit*
Mellom grupper	7,117414	3	2,372471	4,072172	0,015370	2,922277
Innenfor grupper	17,478175	30	0,582606			
Totalt	24,595588	33				

d) Hva er forutsetningene for å bruke en ANOVA-test? Formuler hypotesene for denne ANOVA-testen, og avgjør om resultatet er signifikant.

Oppgave 3. Idunn skal langtidssteke kalkunbryst. På forhånd tiner hun kjøttet til romtemperatur 20 °C. Ovnen forvarmes til $T_{\text{ovn}} = 90\,°\text{C}$. Hun bruker steketermometer. Kalkunen er ferdig når kjernetemperaturen når 70 °C. Det tar omlag to timer.

Idunn ønsker å bruke regresjon til å forutsi nøyaktig når kjøttet er ferdig. I løpet av den første delen av steketiden avleser hun disse kjernetemperaturene:

Tid	Temperatur
0 min	20 °C
5 min	24 °C
10 min	28 °C
25 min	38 °C

Lineær regresjon i Excel gir følgende utskrift:

SAMMENDRAG (UTDATA)

Regresjonsstatistikk	
Multippel R	0,998802
R-kvadrat	0,997606
Justert R-kvadrat	0,996409
Standardfeil	0,462910
Observasjoner	4

Variansanalyse

	fg	*SK*	*GK*	*F*	*Signifkans-F*
Regresjon	1	178,571429	178,571429	833,333333	0,001198
Residualer	2	0,428571	0,214286		
Totalt	3	179,000000			

	Koeffisienter	*Standardfeil*	*t-Stat*	*P-verdi*	*Nederste 95%*	*Øverste 95%*
Skjæringspunkt	20,357143	0,338815	60,083276	0,000277	18,899338	21,814948
Tid	0,714286	0,024744	28,867513	0,001198	0,607823	0,820749

a) Bruk utskriften fra Excel og skriv opp formel for regresjonslinja. Finn de to tidspunktene der regresjonslinja krysser temperaturene $T = 70\,°\text{C}$ og $T = 90\,°\text{C}$. Kan Idunn bruke denne lineære regresjonsmodellen for å forutsi når kalkunen kommer til å være ferdig?

I fysikken er det vanlig å modellere temperaturen til et legeme slik at endringsraten er proporsjonal med temperaturdifferansen til omgivelsene. Denne modellen heter *Newtons avkjølingslov*. For Idunns kalkunstek betyr dette at kjernetemperaturen T følger en ligning på formen:

$$T = T_{\text{ovn}} - \alpha \cdot e^{\beta t},$$

hvor $T_{\text{ovn}} = 90\,°\text{C}$ og α og β er ubestemte koeffisienter. For å finne beste estimater for disse koeffisientene brukes ikke-lineær regresjon. I dette tilfellet bruker man logaritmer og innfører den omformede variabelen

$$y^* = \ln(T_{\text{ovn}} - T).$$

Det er ikke nødvendig å omforme variabelen t for tid. Tabellen som danner grunnlaget for regresjonen blir dermed:

Tid	y^*
0 min	4,2485
5 min	4,1897
10 min	4,1271
25 min	3,9512

Denne ikke-lineære regresjonen gir følgende utskrift fra Excel:

SAMMENDRAG (UTDATA)

Regresjonsstatistikk	
Multippel R	0,999944
R-kvadrat	0,999888
Justert R-kvadrat	0,999832
Standardfeil	0,001665
Observasjoner	4

Variansanalyse

	fg	*SK*	*GK*	*F*	*Signifkans-F*
Regresjon	1	0,049553	0,049553	17882,542801	0,000056
Residualer	2	0,000006	0,000003		
Totalt	3	0,049559			

	Koeffisienter	*Standardfeil*	*t-Stat*	*P-verdi*	*Nederste 95%*	*Øverste 95%*
Skjæringspunkt	4,248120	0,001218	3486,651913	8,2259E-08	4,242877	4,253362
Tid	-0,011899	0,000089	-133,725625	5,5916E-05	-0,012282	-0,011516

Dette gir regresjonslinja

$$\hat{y}^* = 4{,}248\,120 - 0{,}011\,899 \cdot t.$$

b) Finn y^*-verdien som tilsvarer kjernetemperatur $T = 70\,°\text{C}$. Hvilket tidspunkt kan Idunn forvente at kalkunen er ferdig stekt? Beregn verdien til beste estimater $\hat{\alpha}$ og $\hat{\beta}$ i den ikke-lineære modellen

$$\hat{T} = T_{\text{ovn}} - \hat{\alpha} \cdot e^{\hat{\beta} t}.$$

Oppgave 4. Å få yatzy med seksere på ett kast er å slå fem terninger samtidig og at alle blir seksere. Sannsynligheten for dette er $p = \frac{1}{7776}$.

Ixi kjeder seg. Derfor prøver hun $n = 5000$ ganger å kaste fem terninger. La X være antall ganger Ixi får yatzy med seksere.

a) Vis utregningen av sannsynligheten $p = \frac{1}{7776}$. Hvilken fordeling har X? Finn sannsynligheten $P(X = 0)$.

Hassen liker å gå skogstur i skumringa, men han har aldri møtt elg på disse turene. Faktisk har han gått 2500 slike skogsturer. Derfor påstår Hassen at sannsynligheten for å møte en elg er mindre enn $p_0 = \frac{1}{1000}$.

b) Bruk hypotesetesten *ensidig test for sannsynligheten p til sjeldne hendelser*, slik som den er beskrevet under. Forklar med egne ord hva hypotesene sier i eksempelet med Hassens skogsturer. Avgjør om Hassen kan være 95% sikker på påstanden sin. Vis hvordan det er en sammenheng mellom punktsannsynligheten $P(X = 0)$ fra binomisk fordeling og formelen for kritisk verdi k gitt i hypotesetesten under.

Une har oppgradert sin bærbare PC med en uoriginal 14 000 mAh batteripakke. Ikke mange dagene etter oppgraderingen leser Une en artikkel om brann i elektrisk utstyr. Det står at 50% av de bærbare PC-ene som selvantenner hadde uoriginal batteripakke. Derimot er det uoriginale batteripakker i kun 3% av bærbare PC-er som ikke rammes av brann.

c) Une blir derfor bekymret for PC-brann, men offisiell brannstatistikk sier at sannsynligheten for at en bærbar PC selvantenner er $2 \cdot 10^{-5}$. Finn sannsynligheten for at Unes bærbare PC med uoriginal batteripakke plutselig en dag kommer til å begynne å brenne.

Ensidig test for sannsynligheten p til sjeldne hendelser.
Anta at vi har en forsøksrekke bestående av delforsøk hvor sannsynligheten for suksess er konstant lik p. Det utføres et stort antall uavhengige delforsøk hvorav ingen suksess. Vi sammenligner denne sannsynligheten med en fritt valgt verdi p_0 i følgende hypoteser:

$$H_0:\quad p \geq p_0 \qquad\qquad H_1:\quad p < p_0$$

Testobservatoren N er det totale antallet utførte delforsøk (hvorav ingen var suksess). Kritisk verdi på signifikansnivå α beregnes ved formelen

$$k = \frac{\ln \alpha}{\ln(1 - p_0)}.$$

Man forkaster nullhypotesen dersom $N > k$. Behold H_0 dersom $N \leq k$ eller dersom hendelsen inntreffer i løpet av forsøksrekka.

1 Fordelinger og tilnærminger

1.1 Binomisk fordeling

En forsøksrekke består av n forsøk. Hvert forsøk har to mulige utfall: Suksess eller ikke suksess. Sannsynligheten for suksess er p i hvert forsøk. Variabelen X=*antall suksesser i løpet av n forsøk* er da binomisk fordelt og

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Forventning: $\mu = E(X) = np$. Varians: $\sigma^2 = \text{Var}(X) = np(1-p)$.

Tilnærming til normalfordelingen: For $\sigma^2 \geq 5$ er X tilnærmet normalfordelt: $X \simeq N(np, \sqrt{np(1-p)})$.

1.2 Hypergeometrisk fordeling

I en populasjon på N elementer har M elementer en spesiell egenskap. Det gjøres et utvalg på n elementer fra populasjonen. Variabelen X=*antall elementer med spesiell egenskap blant de n utvalgte elementene* er hypergeometrisk fordelt og

$$P(X = x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Forventning: $\mu = E(X) = np$. Varians: $\sigma^2 = \text{Var}(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$ der $p = \frac{M}{N}$.

Tilnærming til binomisk fordeling: Når $N >> n$ (hovedregel $N > 10n$) er X tilnærmet binomisk fordelt med suksessannsynlighet $p = \frac{M}{N}$.

Tilnærming til normalfordelingen: Når $\sigma^2 \geq 5$ er X tilnærmet normalfordelt: $X \simeq N\left(np, \sqrt{np(1-p)\frac{N-n}{N-1}}\right)$.

1.3 Poissonfordelingen

Antall forekomster av hendelsen A er Poissonfordelt hvis

(1) Antall forekomster av A i disjunkte tidsintervaller er uavhengige av hverandre

(2) Forventet antall forekomster av A er konstant lik λ per tidsenhet

(3) To forekomster av A kan ikke være fullstendig sammenfallende på tidsaksen

I løpet av de neste t tidsenhetene vil vi observere X forekomster av hendelsen A. Hvis Poissonforutsetningene er oppfylt, er X Poissonfordelt og

$$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}$$

Forventning: $\mu = E(X) = \lambda t$. Varians: $\sigma^2 = \text{Var}(X) = \lambda t$.

Tilnærming til normalfordelingen: Når $\sigma^2 = \lambda t \geq 10$ er X tilnærmet normalfordelt: $X \simeq N(\lambda t, \sqrt{\lambda t})$.

2 Sentralgrenseteoremet

2.1 Gjennomsnitt av variabler fra samme sannsynlighetsfordeling

La $X_1, \ldots, X_n$ ($n \geq 20$) være uavhengige variabler **fra samme sannsynlighetsfordeling** med forventning μ og standardavvik σ. Da er

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \simeq N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

2.2 Sum av variabler fra samme sannsynlighetsfordeling

La $X_1, \ldots, X_n$ ($n \geq 20$) være uavhengige variabler **fra samme sannsynlighetsfordeling** med forventning μ og standardavvik σ. Da er

$$X_1 + \cdots + X_n \simeq N\left(n\mu, \sqrt{n}\sigma\right)$$

2.3 Sum av normalfordelte variabler

Hvis $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er uavhengige og **normalfordelte** variabler med forventninger μ_i og varianser σ_i^2 der $i = 1, \ldots, n$, vil enhever sum av dem også være normalfordelt:

$$Y = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n$$

er normalfordelt med forventning

$$\mu_Y = a_1\mu_1 + \cdots + a_n\mu_n$$

og varians

$$\sigma_Y^2 = a_1^2\sigma_1^2 + \cdots + a_n^2\sigma_n^2$$

3 Estimering

3.1 Estimering av forventningsverdien μ når σ er kjent

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være variable fra samme fordeling. Alle har forventningsverdi μ (som er den som er ukjent, og som vi skal estimere en verdi for) og kjent standardavvik σ. Vår beste gjetning for forventningsverdien er gjennomsnittet

$$\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Ved å gjøre et nytt utvalg av n variable fra denne fordelingen, vil vi få et nytt gjennomsnitt. Dermed kan vi se på $\overline{X}$ som en variabel i seg selv. Sentralgrenseteoremet gir at $\overline{X}$ er tilnærmet normalfordelt

$$\overline{X} \simeq N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Da er det f.eks 95% sikkert at en verdi $\overline{X}$ ligger i intervallet $\mu \pm 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, som gir (ved å stokke litt om på ulikheter) at det er 95% sikkert at μ ligger i intervallet $\overline{X} \pm 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Dermed kan vi lage konfidensintervaller for den ukjente μ basert på en gjennomsnittsverdi:

$$\overline{X} \pm (z\text{-verdi som er bestemt av konfidensnivået}) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

3.2 Estimering av forventningsverdien μ når σ er ukjent

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være variable fra samme fordeling. Alle har forventningsverdi μ (som er den som er ukjent, og som vi skal estimere en verdi for) og ukjent standardavvik σ. Vår beste gjetning for forventningsverdien er gjennomsnittet

$$\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Når σ er ukjent, må vi estimere denne også. Vår beste gjetning til variansen i populasjonen, er variansen i utvalget:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

Estimatet for σ blir da

$$\hat{\sigma} = S$$

Konfidensintervaller for μ med estimert verdi for σ lager vi slik:

$$\overline{X} \pm (\text{kritisk verdi fra } t\text{-tabellen med } (n-1) \text{ frihetsgrader}) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

3.3 Estimering av sannsynlighet/andel p

La X være binomisk fordelt med suksess-sannsynlighet p (ukjent) eller hypergeometrisk fordelt med andel elementer i populasjonen med bestemt egenskap lik $\frac{M}{N} = p$. Ved å gjøre et utvalg på n forsøk og undersøke antall suksesser i forsøksrekken, kan vi beregne en estimert verdi for suksesssannsynligheten:

$$\hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{\text{antall suksesser i løpet av } n \text{ forsøk}}{\text{antall forsøk}}$$

Så lenge n er stor nok, $n \geq 20$ (dersom X er hypergeometrisk må i tillegg n være liten nok i forhold til populasjonen ($N >> n$)), er $X \simeq N\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$. Derfor blir $\hat{p}$ tilnærmet normalfordelt $N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$. Siden vi ikke kjenner verdien av p må vi bruke den estimerte verdien $\hat{p}$ når vi skal lage konfidensintervaller for p:

$$\hat{p} \pm (z\text{-verdi som er bestemt av konfidensnivået}) \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

3.4 Estimering av antall hendelser per tidsenhet λ

Hvis X er Poissonfordelt med forventningsverdi λ (ukjent) per tidsenhet, er

$$\hat{\lambda} = \frac{X}{t} = \frac{\text{antall hendeler i løpet av } t \text{ tidsenheter}}{\text{antall tidsenheter}}$$

Så lenge $\lambda t \geq 10$ er $X \simeq N(\lambda t, \sqrt{\lambda t})$ og dermed blir $\hat{\lambda} \simeq N\left(\lambda, \sqrt{\frac{\lambda}{t}}\right)$. Siden vi ikke kjenner verdien av λ, bruker vi $\hat{\lambda}$ når vi skal lage konfidensintervaller for λ:

$$\hat{\lambda} \pm (z\text{-verdi som er bestemt av konfidensnivået}) \cdot \sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{t}}$$

4 Hypotesetesting på én dataserie

4.1 Z-test: Test av μ når σ er kjent

Testobservatoren er

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Du tror på forventningsverdien μ_0 inntil testen eventuelt viser at nullhypotesen skal forkastes. Kritisk z-verdi avhenger av konfidensnivået, og den finnes i tabellen for normalfordelingen:

	H_0	H_1	Forkast H_0 hvis
Alt. 1	$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z >$(kritisk z-verdi)
Alt. 2	$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z < -$(kritisk z-verdi)
Alt. 3	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\|Z\| >$(kritisk z-verdi)

4.2 T-test: Test av μ når σ er ukjent

Testobservatoren er

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Du tror på forventningsverdien μ_0 inntil testen eventuelt viser at nullhypotesen skal forkastes. Kritisk t-verdi avhenger av konfidensnivået, og den finnes i tabellen for t-fordelingen med $(n-1)$ frihetsgrader:

	H_0	H_1	Forkast H_0 hvis
Alt. 1	$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$T >$(kritisk t-verdi)
Alt. 2	$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$T < -$(kritisk t-verdi)
Alt. 3	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\|T\| >$(kritisk t-verdi)

4.3 Hypotesetest av sannsynligheten p

Testobservatoren er

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$$

Du tror på sannsynligheten p_0 inntil testen eventuelt viser at nullhypotesen skal forkastes. Kritisk z-verdi avhenger av konfidensnivået, og den finnes i tabellen for normalfordelingen:

	H_0	H_1	Forkast H_0 hvis
Alt. 1	$p \leq p_0$	$p > p_0$	$Z >$(kritisk z-verdi)
Alt. 2	$p \geq p_0$	$p < p_0$	$Z < -$(kritisk z-verdi)
Alt. 3	$p = p_0$	$p \neq p_0$	$\|Z\| >$(kritisk z-verdi)

4.4 Grubbs test for ensomme uteliggere

Hypoteser:

H_0: Det er ingen uteliggere i datasettet

H_1: Det er nøyaktig én uteligger i datasettet

Testobservatoren er

$$G = \frac{\max|Y_i - \overline{Y}|}{S}$$

der $Y_1, \ldots, Y_N$ er dataverdiene, $\overline{Y}$ er gjennomsnittet av dataverdiene og S er utvalgets standardavvik $\left(S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \overline{Y})^2\right)$. Nullhypotesen forkastes dersom

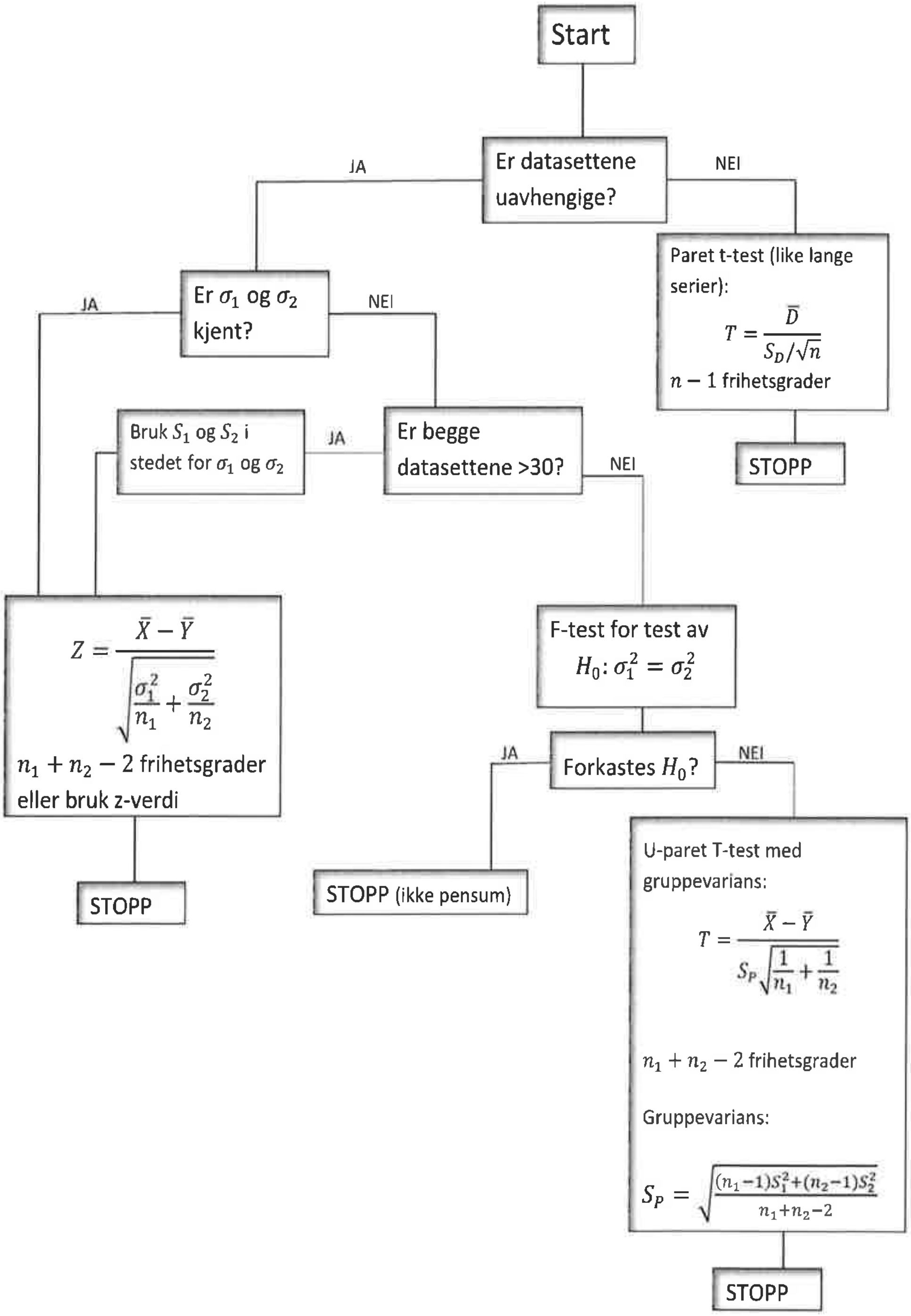
$$G > \frac{N-1}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{t^2}{N-2+t^2}}$$

der t finnes i tabellen for t-fordelingen:

* $N-2$ frihetsgrader
* signifikansnivå $\alpha/2N$

Ved ensidig test (sjekker om største/minste verdi er uteligger), brukes signifikansnivået α/N for å finne t.

Hypotesetesting med to dataserier



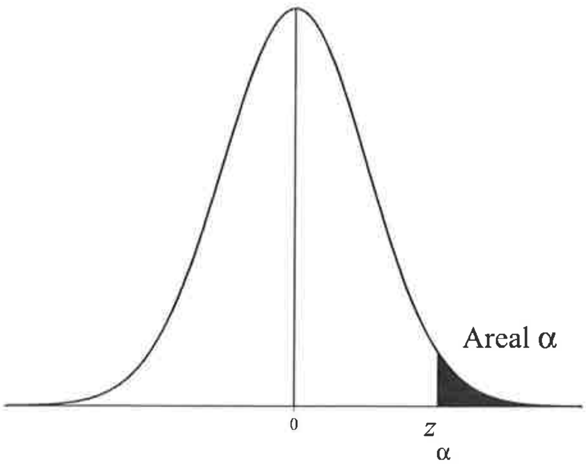
Kumulativ standardnormalfordeling

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,00	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,90	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,80	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,70	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,60	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,50	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,40	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,30	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,20	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,10	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,00	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,90	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,80	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,70	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,60	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,50	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,40	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,30	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,20	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,10	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,00	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,90	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,80	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,70	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,60	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,50	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,40	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,30	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,20	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,10	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,00	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,00	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,10	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,20	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,30	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,40	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,50	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,60	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,70	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,80	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,90	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,00	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,10	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,20	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,30	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,40	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,50	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,60	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,70	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,80	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,90	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,00	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,10	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,20	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,30	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,40	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,50	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,60	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,70	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,80	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,90	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,00	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

t-fordelingens kvantiltabell

Antall frihetsgrader	Areal *alfa* 0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
31	0,682	1,309	1,696	2,040	2,453	2,744
32	0,682	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738
33	0,682	1,308	1,692	2,035	2,445	2,733
34	0,682	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728
35	0,682	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
45	0,680	1,301	1,679	2,014	2,412	2,690
50	0,679	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
70	0,678	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648
80	0,678	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639
100	0,677	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626
1000	0,675	1,282	1,646	1,962	2,330	2,581
10000	0,675	1,282	1,645	1,960	2,327	2,576

Standardnormalfordelingens kvantiltabell



α	z_α
0,100	1,282
0,050	1,645
0,025	1,960
0,010	2,326
0,005	2,576
0,001	3,090