Oppg 1

i) Store halvakse: $a = 3$, lille halvakse: $b = 2$

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \Longleftrightarrow 9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$$

ii) $f(x,y) = 4xy$ (rektangelets areal)

$g(x,y) = 9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$ (betingelsen)

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 4y \\ 4x \end{bmatrix}, \quad \nabla g = \begin{bmatrix} 18x \\ 8y \end{bmatrix}$$

Ligninger:

I. $4y = \lambda\, 18x$

II. $4x = \lambda\, 8y$

III $9x^2 + 4y^2 = 36$

I innsatt i II gir

$x = 9\lambda^2 x$

$x = 0$ gir areal $f(x,y) = 0$ og er ikke relevant.

$\Rightarrow 9\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1/3$

Innsatt i lig I:

$4y = \pm 6x$

Scanned by CamScanner

Siden (x, y) ligger i første kvadrant er kun + fortegnet relevant:

$$y = \frac{3}{2} x$$

Innsatt i $\overline{III}$:

$$9x^2 + 4\left(\frac{3}{2}x\right)^2 = 36$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2} \text{ og } y = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

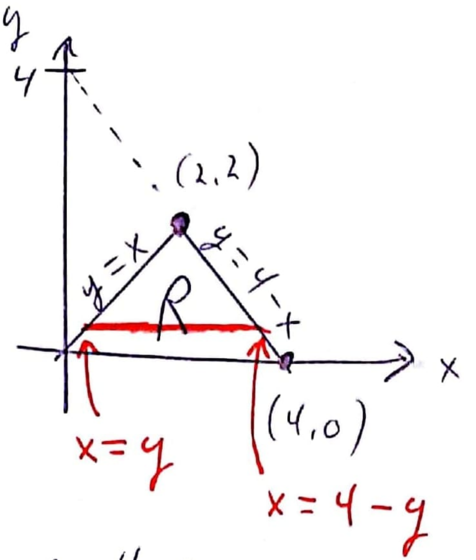
Har vist at $\left(\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ er eneste stasjonære punkt i første kvadrant med $f(x, y) \geq 0$.

Rektangelet som maksimerer arealet må da ha sidelengder $\sqrt{2}$ og $\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Maksimumsarealet:

$$f\left(\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} = \underline{\underline{12}}$$

2a



R:

$0 \le y \le 2$

$y \le x \le 4-y$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^2 \int_y^{4-y} 3xy\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \frac{3}{2} y \left[x^2\right]_y^{4-y} dy = \int_0^2 \frac{3}{2} y \left((4-y)^2 - y^2\right) dy$$

$$= \int_0^2 \frac{3}{2} y (16-8y)\,dy = \int_0^2 24y - 12y^2\,dy$$

$$= \left[12y^2 - 4y^3\right]_0^2 = 12\cdot 4 - 4\cdot 8 = \underline{\underline{16}}$$

R har areal $\iint_R dA = \frac{4\cdot 2}{2} = 4$

trekant med grunnlinje 4 og høyde 2.

Middelverdien til f over R:

$$\bar{f} = \frac{1}{4}\cdot \iint_R f(x,y)\,dA = \frac{1}{4}\cdot 16 = \underline{\underline{4}}$$

Scanned by CamScanner

2b

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \int_0^{y} 2 \cdot e^x \, dz \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} 2 \cdot e^x \left[z \right]_0^y \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} e^x \cdot 2y \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 e^x \left[y^2 \right]_0^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \overset{u}{x} \cdot \overset{v'}{e^x} \, dx$$

$$= \left[\overset{u}{x} \cdot \overset{v}{e^x} \right]_0^1 - \int_0^1 \overset{u'}{1} \cdot \overset{v}{e^x} \, dx$$

$$= e - 0 - \left[e^x \right]_0^1$$

$$= e - (e - 1)$$

$$= \underline{\underline{1}}$$

3a

$$\begin{array}{c} \\ \vec{r} = \end{array} \begin{array}{l} \quad\ x \qquad\quad\ \ y \qquad\quad\ z \\ \left[3\sin t,\ 5\cos t,\ 4\cdot\sin t\right] \end{array}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[3\cdot\cos t,\ -5\cdot\sin t,\ 4\cdot\cos t\right]$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{9\cdot\cos^2 t + 25\cdot\sin^2 t + 16\cos^2 t}$$

$$= \sqrt{25(\cos^2 t + \sin^2 t)} = 5$$

$$ds = |\vec{v}|\,dt = 5\,dt$$

$$\int_C xyz\,ds = \int_0^{\pi/2} 3\cdot\sin t\cdot 5\cdot\cos t\cdot 4\cdot\sin t\cdot 5\,dt$$

$$= 300\int_0^{\pi/2} \cos t\cdot\sin^2 t\,dt$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \sin(t),\quad du = \cos t\,dt \\ u(0) = 0,\quad u(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{array}}$$

$$= 300\cdot\int_0^1 u^2\,du = \underline{\underline{100}}$$

b) $$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2x & 2yze^{y^2} & e^{y^2} \end{vmatrix} = \underline{i}\left(2ye^{y^2} - 2y\cdot e^{y^2}\right) - \underline{j}(0-0) + \underline{k}(0-0)$$

$$= 0\underline{i} + 0\underline{j} + 0\underline{k} = \vec{0}$$

$\vec{F}$ er virvelfritt og dermed konservativt.

c) Siden $\vec{F}$ er konservativ finnes en potensialfunksjon $f(x,y,z)$ slik at $\vec{F} = \nabla f$.

Denne er: $f(x,y,z) = x^2 + z\cdot e^{y^2}$

Sjekk: $\nabla f = 2x\,\underline{i} + 2yz\cdot e^{y^2}\,\underline{j} + e^{y^2}\,\underline{k}$

$= \vec{F}$ ok!

(Se ukeoppgaver eller andre løsningsforslag for standard måten å utlede potensialfunksjonen på).

Startpunkt for C: $\vec{r}(0) = [0, 5, 0]$

Endepunkt for C: $\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = [3, 0, 4]$

$$\Rightarrow \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = f(3,0,4) - f(0,5,0)$$

$$= 3^2 + 4\cdot e^0 - 0 = \underline{\underline{13}}$$

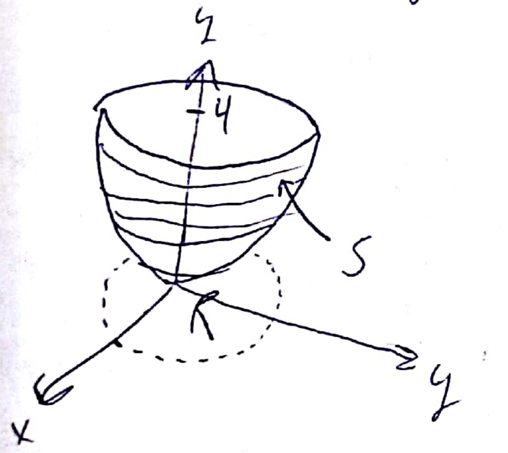
Scanned by CamScanner

4 a

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x + 3x^2y^2 + e^{z \cdot \sin y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x \cdot \sin z - 2xy^3\right) + \frac{\partial}{\partial z} z$$

$$= 2 + 6xy^2 - 6xy^2 + 1 = \underline{3}$$

Enkel integrant!



Beskriver D i sylinder-koordinater:

D: $0 \le \theta \le 2\pi$

$0 \le r \le 2$

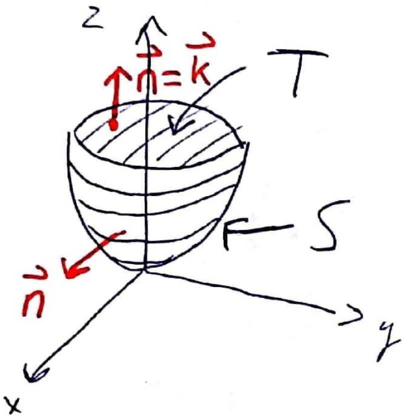
$r^2 \le z \le 4$

$$\iiint_D \nabla \cdot \vec{F}\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2}^{4} 3r \, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2} 12r - 3r^3 \, dr\, d\theta$$

$$= 2\pi \left[6r^2 - \frac{3}{4}r^4\right]_0^2 = \underline{\underline{24\pi}}$$

4b Merk at flaten S bare er en del av randen til D. Det som mangler er "toppen", T, dvs den delen av planet $z=4$ som er inni sylinderen $x^2+y^2=4$



Vi ser at enhets-normal-vektoren på T er $\vec{n}=\underline{k}$

$\Rightarrow \vec{F}\cdot\vec{n} = z = 4$ på T.

Fluks gjennom T:

$$\iint_T \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = 4\cdot\iint_T d\sigma = \underline{16\pi}$$

arealet til flaten T er $\pi\cdot 2^2 = 4\pi$

Divergensteoremet:

$$\overbrace{\iiint_D \nabla\cdot\vec{F}\,dV}^{24\pi \text{ fra a)}} = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma + \overbrace{\iint_T \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma}^{16\pi}$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = 24\pi - 16\pi = \underline{\underline{8\pi}}$$

Retningen til fluksen er bort fra z-aksen.

Oppg 5a

i) $\Sigma F = -kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

ii) $t = \tau\tilde{t}$, $x = L\cdot\tilde{x}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{L}{\tau}\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{L}{\tau^2}\frac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{t}^2}$$

Innsatt i ligningen i punkt i):

$$\frac{L}{\tau^2}\frac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{t}^2} + \frac{bL}{m\tau}\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} + \frac{k\cdot L}{m}\tilde{x} = 0$$

$$\frac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{t}^2} + \frac{b}{m}\tau\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} + \frac{k\tau^2}{m}\cdot\tilde{x} = 0$$

Velger tidsskala $\underline{\tau = \sqrt{m/k}}$:

$$\frac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{t}^2} + \alpha\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} + \tilde{x} = 0,$$

hvor $\alpha = \frac{b}{m}\tau = \frac{b}{m}\sqrt{\frac{m}{k}} = \underline{\frac{b}{\sqrt{m\cdot k}}}$

5b i) Viser først at α er dimensjonsløs:

$$\dim \alpha = \frac{Ns/m}{\sqrt{kg \cdot N/m}} = \frac{kg \frac{\cancel{m}}{s^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{s}}{\cancel{m}}}{\sqrt{kg \cdot kg \cdot \frac{\cancel{m}}{s^2} \cdot \frac{1}{\cancel{m}}}} = \frac{kg/s}{kg/s} = 1$$

Numerisk verdi: $\alpha = \frac{b}{\sqrt{m \cdot k}} = \underline{\underline{2}}$

Innfører dimensjonsløs fart: $\tilde{v} = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}$

Ligningen fra oppg. a) ii) kan da skrives:

$$\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} + 2\tilde{v} + \tilde{x} = 0$$

Dette gir ligningssystemet

$$\text{I.} \quad \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \tilde{v}$$

$$\text{II.} \quad \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} = -\tilde{x} - 2\tilde{v}$$

ii) Eulers metode:

bruk lig. I

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_0 + \left(\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}\right)_0 \cdot \Delta\tilde{t} = \tilde{x}_0 + \tilde{v}_0 \cdot \Delta\tilde{t}$$

$$\tilde{v}_1 = \tilde{v}_0 + \left(\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}}\right)_0 \cdot \Delta\tilde{t} = \tilde{v}_0 - (\tilde{x}_0 + 2\tilde{v}_0) \cdot \Delta\tilde{t}$$

bruk lig. II

Oppg 5c

Bestemmer først A og B slik at eksakt løsning tilfredsstiller initialbetingelser:

$$\tilde{x}(\tilde{t}) = A \cdot e^{-\tilde{t}} + B\,\tilde{t} \cdot e^{-\tilde{t}}$$

$$\tilde{v}(\tilde{t}) = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = -A \cdot e^{-\tilde{t}} + B \cdot e^{-\tilde{t}}(1-\tilde{t})$$

$\tilde{X}_0 = \tilde{x}(0) = 0$ og $\tilde{V}_0 = \tilde{v}(0) = 1$

gir $A = 0$ og $B = 1$

Rekkeutvikler eksakt løsning i tidspkt $\tilde{t} = \Delta\tilde{t}$:

$$\tilde{x}(\Delta\tilde{t}) = \Delta\tilde{t} \cdot e^{-\Delta\tilde{t}}$$
$$= \Delta\tilde{t}\left(1 - \Delta\tilde{t} + \mathcal{O}(\Delta\tilde{t}^2)\right)$$
$$= \Delta\tilde{t} - \Delta\tilde{t}^2 + \mathcal{O}(\Delta\tilde{t}^3)$$

$$\tilde{v}(\Delta\tilde{t}) = (1-\Delta\tilde{t})\,e^{-\Delta\tilde{t}}$$
$$= (1-\Delta\tilde{t}) \cdot \left(1 - \Delta\tilde{t} + \mathcal{O}(\Delta\tilde{t}^2)\right)$$
$$= 1 - 2\Delta\tilde{t} + \mathcal{O}(\Delta\tilde{t}^2)$$

Sammenligner med uttrykkene fra b) ii):

$$\tilde{X}_1 = \Delta\tilde{t}$$

$$\tilde{V}_1 = 1 - 2\Delta\tilde{t}$$

Vi ser at Eulers metode er nøyaktig til første orden i tidssteget $\Delta\tilde{t}$, slik en første-ordens numerisk metode skal være.