**Forkurs for 3-årig ingeniørutdanning og integrert masterstudium i teknologiske fag og tilhørende realfagskurs.**
Høgskolen i Bergen, Høgskolen i Sørøst-Norge, Høgskolen i Oslo og Akershus, Høgskulen i Sogn og Fjordane, Høgskolen i Østfold, NTNU, Universitetet i Agder, Universitetet i Stavanger, Universitetet i Tromsø, Rogaland kurs- og kompetansesenter, Westerdals

**Eksamensoppgave**

# MATEMATIKK

**Bokmål**

**3. august 2016**

**kl. 9.00-14.00**

**Hjelpemidler:**

Godkjente formelsamlinger i matematikk og fysikk.
Godkjent kalkulator.

**Andre opplysninger:**

Oppgavesettet består av 4 sider medregnet forsiden, og inneholder 5 oppgaver.
Du skal svare på alle oppgavene og deloppgavene.

Ved vurdering teller alle deloppgaver likt.

## Oppgave 1

Forenkle uttrykkene så mye som mulig:

a)

$$\frac{(2x)^2 \cdot \sqrt[3]{y}}{8y^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{x} \cdot x^{\frac{3}{2}}}$$

b)

$$(x-2)(x+2) + 3(x+1)(x+3) - 4x(x+3)$$

c) Løs likningen ved regning:

$$\sqrt{x-2} + 2x = 5$$

d) Løs ulikheten:

$$\frac{x+3}{x-2} \leq 2x$$

e) Deriver funksjonen:

$$g(x) = \ln(x^2 + 1)$$

Regn ut integralene:

f)

$$\int (3x + \cos 2x)\, dx$$

g)

$$\int x^2 (x^3 + 1)^5\, dx$$

h) Regn ut $y$ som funksjon av $t$ når vi vet at:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{3y^2} \qquad \text{og} \qquad y(0) = 2$$

i) Bestem konstantene $a$ og $b$ slik at $x = 1$ og $x = 2$ er to av løsningene i likningen:

$$x^3 + \mathrm{a}x^2 + b = 0$$

Beregn deretter den tredje løsningen.

## Oppgave 2

Gitt funksjonen:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x}$$

a) Finn definisjonsmengden til $f(x)$ og regn ut nullpunktene til funksjonen.

b) Finn ved regning eventuelle asymptoter til $f(x)$.

c) Vis at den deriverte til $f(x)$ er:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2}$$

d) Finn ved regning eventuelle topp- og bunnpunkter til $f(x)$.

e) Tegn grafen til $f(x)$ sammen med eventuelle asymptoter.
Hva er verdimengden til $f(x)$?

f) Grafen til $f(x)$ og $x -$ aksen avgrenser et flatestykke i 2. kvadrant. Regn ut eksakt verdi til arealet av dette flatestykket.

## Oppgave 3

I pyramiden $ABCT$ er koordinatene til hjørnene kjent: $A(1,0,0)$, $B(5,1,0)$, $C(-2,3,1)$ og $T(3,0,16)$. Punktene $A$, $B$ og $C$ danner grunnflaten i pyramiden.

a) Finn $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ og vinkelen mellom disse to vektorene.

b) Finn arealet av grunnflaten i pyramiden ved regning.

c) Finn volumet av pyramiden $ABCT$.

d) Vis ved regning at likningen til planet $\alpha$ bestemt av punktene $A$, $B$ og $C$ er:

$$\alpha:\ x - 4y + 15z = 1$$

e) Finn en parameterframstilling for linja $l$ som går gjennom punktet $T$ og som står normalt på grunnflaten i pyramiden.

f) Finn koordinatene til skjæringspunktet mellom planet $\alpha$ og linja $l$.

## Oppgave 4

I en tenniskamp mellom to spillere $a$ og $b$ vinner den spilleren som først har vunnet to sett. La $A$ være hendingen at $a$ vinner et sett, og la $B$ være hendingen at $b$ vinner et sett. Sannsynligheten for at $a$ vinner et sett er $P(A) = 0{,}6$ og sannsynligheten for at $b$ vinner et sett er $P(B) = 0{,}4$. Spillerne lar seg ikke påvirke av det som har skjedd i tidligere spilte sett.

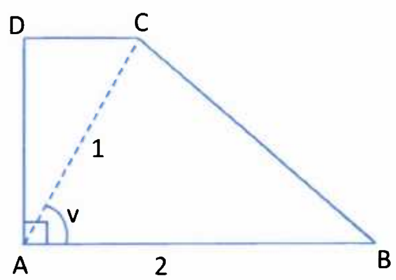
a) Hva er sannsynligheten for at $b$ vinner det første settet og $a$ vinner sett nummer to og tre?

La $X$ være antall sett som spilles inntil en spiller har vunnet kampen.

b) Beregn $P(X = 2)$ og $P(X = 3)$.

## Oppgave 5

I trapeset $ABCD$ er $AB$ og $CD$ de parallelle sidene. $AB = 2$, $AC = 1$, $\angle A = \frac{\pi}{2}$ og $\angle BAC = v$.




a) Vis at arealet av trapeset kan uttrykkes som en funksjon av $v$ slik:

$$A(v) = \frac{(2 + \cos v)\sin v}{2}$$

b) Finn ved regning den vinkelen $v$ som gir størst mulig areal.